測度距離空間上の正則集合の測度について

北別府 悠

1. 測度距離空間上の微分構造

完備可分距離空間 (X,d) とその上の Borel 測度 m の組 (X,d,m) を測度距離空間という．例えば完備なリーマン多様体とその上の計量から定まる距離と体積測度の組は測度距離空間の典型例になっている．リーマン多様体上では微分積分が自由にできるが, 一般の距離空間上では微分構造がないために通常の意味での微分ができない．そこで, 次のようなものを考える: $f \in L^2(X,m)$ に対して,

$$\mathsf{Ch}(f) := \frac{1}{2}\inf\left\{\liminf_{n\to\infty}\int_X \mathrm{Lip}(f_n)^2\,dm \ ;\ f_n \xrightarrow{L^2} f\right\}$$

と定める．ここで g : 局所 Lipschitz 関数, $x \in X$ に対して

$$\mathrm{Lip}(g)(x) := \limsup_{d(x,y)\to 0}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}$$

とする．$x \in X$ が孤立点の時は $\mathrm{Lip}(g)(x) = \infty$ とする．$\mathcal{D}(\mathsf{Ch}) := \{f \in L^2\ ;\ \mathsf{Ch}(f) < \infty\}$ と定める．このときある L^2 関数 $|\nabla f|_w$ が存在して, $2\mathsf{Ch}(f) = \int |\nabla f|_w^2\,dm$ が成り立つ．これにより $f \in \mathcal{D}(\mathsf{Ch})$ には微分が定まっていると考えることができる．従って $W^{1,2}(X,d,m) := \mathcal{D}(\mathsf{Ch})$ にノルム $\|f\|_{1,2}^2 := \|f\|_{L^2}^2 + 2\mathsf{Ch}(f)$ を入れることで Sobolev 空間が定義できる．一般に $W^{1,2}$ は Banach 空間になることが知られているが, Hilbert 空間になるとは限らない (例えば リーマンでない Finsler 多様体上では $W^{1,2}$ は Banach 空間にしかならない). そこで次の定義をする．

Definition 1.1 ([6])**.** 測度距離空間 (X,d,m) が inifnitesimally Hilbertian であるとは, Sobolev 空間 $W^{1,2}(X,d,m)$ が Hilbert 空間であることをいう．

2. RCD 空間

(X,d,m) を測度距離空間とする．X 上の Borel 確率測度であって

$$\int_X d^2(x,o)\,d\mu(x) < \infty$$

をある点 $o \in X$ に対して満たすような μ 全体の集合を $\mathcal{P}_2(X)$ で表すことにする．$\mathcal{P}_2(X)$ 上には距離 W_2 を定義することができ, (X,d) が測地的, すなわち与えられた 2 点を結ぶ最短曲線が必ず見つけられるような距離空間, であれば $\mathcal{P}_2(X)$ もそうなることが知られている．$\mathcal{P}_2(X)$ 上の汎関数 Ent_m を次のように定義する;

$$\mathsf{Ent}_m(\mu) := \begin{cases} \int_{\{\rho>0\}}\rho\log\rho\,dm & \text{if } \mu = \rho m \ll m \text{ かつ } (\rho\log\rho)_+ : \text{ integrable}, \\ +\infty. \end{cases}$$

エントロピー的曲率次元条件 $\mathsf{CD}^e(K,N)$ $(K \in \mathbb{R}, N \in (1,\infty))$ を定義する．

Definition 2.1 ([5])**.** 測度距離空間 (X,d,m) がエントロピー的曲率次元条件 $\mathsf{CD}^e(K,N)$ を満たすとは, 任意の $\mu_0,\mu_1 \in \mathcal{P}_2(X)$ で $\mathsf{Ent}_m(\mu_i) < \infty$ を満たすものに対して, あ

る測地戦 $\{\mu_t\}_{t>0}$ が存在して,

$$\exp\left(-\frac{1}{N}\mathsf{Ent}_m(\mu_t)\right) \geq$$
$$\sigma^{(1-t)}_{K,N}(W_2(\mu_0,\mu_1))\exp\left(-\frac{1}{N}\mathsf{Ent}_m(\mu_0)\right)+\sigma^{(t)}_{K,N}(W_2(\mu_0,\mu_1))\exp\left(-\frac{1}{N}\mathsf{Ent}_m(\mu_1)\right)$$

が成り立つことを言う. ここで

$$\sigma^{(t)}_{K,N}(\theta) := \frac{\sin\left(t\theta\sqrt{\frac{K}{N}}\right)}{\sin\left(\theta\sqrt{\frac{K}{N}}\right)}$$

と定義されており, $K=0$ の時は単に $\sigma^{(t)}_{0,N}(\theta)=t$, $K<0$ の時は sin を sinh に変えた式で定義する.

$\mathsf{CD}^e(K,N)$ かつ infinitesimally Hilbertian な測度距離空間 (X,d,m) を $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ 空間という. この $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ は Ricci 曲率が下から K, 次元が上から N で抑えられている多様体の一般化を与えている. 実際, (M,g) を n 次元の完備なリーマン多様体とすると, (M,d_g,vol_g) が測度距離空間として $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ であることと, $\mathrm{Ric}_g \geq K$ かつ $n \leq N$ を満たすことは同値であることが知られている.

3. 測度付き Gromov(-Hausdorff) 収束と接空間

3.1. pmG 収束. 測度距離空間列に対して収束概念を定義する. のちのためにより一般の場合を扱いたいので点付きの測度距離空間というものを考えることにする. すなわち, 点付き測度距離空間とは測度距離空間 (X,d,m) と其の上の点 $x \in \operatorname{supp} m$ からなる四つ組 (X,d,m,x) のことを指す.

Definition 3.1. 点付き測度距離空間の列 $\{(X_n,d_n,m_n,\bar{x}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点付き測度距離空間 $(X_\infty,d_\infty,m_\infty,\bar{x}_\infty)$ に点付き measured Gromov 収束 (pmG 収束) するとは, ある完備可分距離空間 (Z,d_Z) 及び, 等長埋込 $\iota_n : X_n \to Z$, $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ が存在して, $\iota_n(\bar{x}_n) \to \iota_\infty(\bar{x}_\infty)$ かつ, $(\iota_n)_* m_n$ が $(\iota_\infty)_* m_\infty$ に弱収束, すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\int_Z \psi\, d(\iota_n)_* m_n = \int_Z \psi\, d(\iota_\infty)_* m_\infty$$

が任意の有限な台を持つ Z 上の連続関数 $\psi \in C_{bs}(Z)$ で成り立つことをいう.

Remark 3.2. もし, (X_n,d_n,m_n) が doubling 条件を満たし, $\operatorname{supp} m_\infty = X_\infty$ ならば, pmG 収束はいわゆる点付き measured Gromov-Hausdorff 収束と同値であることが知られている. すなわちある $\epsilon_n \downarrow 0$, $R_n \uparrow \infty$, 及び Borel 写像 $\phi_n : B_{R_n}(\bar{x}_n) \to X_\infty$ が存在して, $\phi_n(\bar{x}_n) = \bar{x}_\infty$ かつ

(1) $|d_n(x,y) - d_\infty(\phi_n(x),\phi_n(y))| < \epsilon_n$ が任意の $x,y \in B_{R_n}(\bar{x}_n)$ で成り立つ.
(2) $B_{\epsilon_n}(\phi_n(B_{R_n}(\bar{x}_n))) \supset B_{R_n-\epsilon_n}(\bar{x}_\infty)$.
(3) $(\phi_n)_* m_n$ が m_∞ に弱収束する.

前節の RCD 空間は次の意味で mpG 収束に関して点列コンパクトである.

Theorem 3.3 ([8])**.** *(X_n,d_n,m_n), $n\in\mathbb{N}$ は $\mathsf{RCD}^*(K_n,N)$ 空間であるとし, $K_n \to K \in \mathbb{R}$ とする. この時ある点付き測度距離空間 $(X_\infty,d_\infty,m_\infty,\bar{x}_\infty)$ が存在して $(X_n,d_n,m_n,\bar{x}_n) \xrightarrow{pmG} (X_\infty,d_\infty,m_\infty,\bar{x}_\infty)$ かつ $(X_\infty,d_\infty,m_\infty)$ は $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ である.*

Example 3.4. (M_n,g_n) を N 次元の完備リーマン多様体で $\mathrm{Ric}_{g_n} \geq K$ を満たすものだとする. $(M_n,d_n,\underline{\mathrm{vol}}_{g_n}) \xrightarrow{pmG} (Y,d_Y,\nu)$ が成り立つとき, (Y,d_Y,ν) を (K,N)-Ricci limit 空間というが, Theorem 3.3 より, (K,N)-Ricci limit 空間 (Y,d_Y,ν) は $\mathsf{RCD}^*(K,N)$ 空間になっている.

3.2. **接空間.** 多様体における接空間にあたるものを定義する. (X, d, m) を $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間とすると, 距離関数を拡大した空間 $(X, r^{-1}d, m)$ は $\mathsf{RCD}^*(r^2K, N)$ 空間になる. それに対して測度を定数倍しても曲率の下限も次元の上限もなんら変化しないことが示せる. そこで次の点付き測度距離空間の族を考える. $\{(X, r^{-1}d, \underline{m}, x)\}_{r>0}$. ここで $x \in \operatorname{supp} m$ であり, $\underline{m}$ は適当な正規化である. このようにすると Theorem 3.3 より適当な減少列 $\{r_n\}$ をとることで, 極限空間が存在し, しかもそれは $\mathsf{RCD}^*(0, N)$ 空間になっていることが示せる. そこで点 $x \in \operatorname{supp} m$ における接空間を

$$\mathsf{Tan}(X, x) := \left\{(Y, d_Y, m_Y, \bar{y}) \,;\, (X, r_n^{-1}d, \underline{m}, x) \xrightarrow{pmG} (Y, d_Y, m_Y, \bar{y}) \text{ for some } r_n \downarrow 0\right\}$$

によって定める. この集合が空でないことは今の述べたことから明らか. 次の結果が知られている.

Theorem 3.5 ([10])**.** (X, d, m) を $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間とする. k-次元正則集合 $\mathcal{R}_k$ を

$$\mathcal{R}_k := \left\{x \in \operatorname{supp} m \,;\, \mathsf{Tan}(X, x) = \{\mathbb{R}^k\}\right\}$$

で定める. すなわち, 接空間が一意で k 次元のユークリッド空間に同型になっているような点全体の集合を $\mathcal{R}_k$ で表す. この時

$$m\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{[N]} \mathcal{R}_k\right) = 0$$

が成り立つ.

Example 3.6. 例えば測度距離空間として n 次元完備リーマン多様体 (M, g) を考えれば明らかに $M = \mathcal{R}_n$ が成り立つ. また任意の (K, N)-Ricci limit 空間 (Y, d_Y, ν) はある $1 \leq k \leq N$ が存在して $\nu(Y \setminus \mathcal{R}_k) = 0$ を満たすことが知られている ([3, 4]).

4. 主結果

前章の結果から自然に次の問いが浮かんでくる.

Problem 4.1. 与えられた $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間 (X, d, m) に対して $m(X \setminus \mathcal{R}_k) = 0$ なる $1 \leq k \leq N$ が存在するか?

今のところこの問いに対して完全な解答は得られていない. 今回の講演の主結果は以下に述べる定理である.

Theorem 4.2 ([9])**.** *(X, d, m) を $\mathsf{RCD}^*(K, N)$ 空間とする. $\mathcal{R}_k \neq \emptyset$ と仮定すると, $m(\cup_{i \geq k} \mathcal{R}_i) > 0$ が成り立つ. 特に $N \in \mathbb{N}$ かつ $\mathcal{R}_N \neq \emptyset$ ならば $m(\mathcal{R}_N) > 0$ を満たす.*

Remark 4.3. ある k に対して $\mathcal{R}_k \neq \emptyset$ であることと $m(\mathcal{R}_k) > 0$ であることは一般にかなり異なる. しかし主結果により $k = N$ という場合にはこのようなことが起きるということがわかる. $k = N$ のとき $m(X \setminus \mathcal{R}_N) = 0$ となるかどうかは今の所分かっていない.

4.0.1. 証明の概略. : 証明は次の Mondino-Naber による積分系の excess estimate と [2] による pmG 収束に関する関数の収束理論に基づく.

Theorem 4.4 ([10])**.** *ある $\beta > 2$ が存在して, 次が成り立つ. 点 $x \in \mathcal{R}_k$ を固定する. 任意の $0 < \epsilon \ll 1$ に対してある $R \gg 1$ が存在して, $0 < r = r(x, \epsilon, R) \ll 1$ が存在して以下が成り立つ; 拡大した $(X, r^{-1}d, \underline{m}, x)$ 上, 点 $\{p_i, q_i\}_{i=1,\ldots,k} \subset B^{d_r}_{R^\beta}(x)$ および, $\{p_i + p_j\}_{1 \leq i < j \leq k} \subset B^{d_r}_{2R^\beta}(x) \setminus B^{d_r}_{R^\beta}(x)$ が存在して,*

$$\sum_{i=1}^{k} \fint_{B^{d_r}_R(x)} |\nabla e_{p_i, q_i}|_w^2 \, d\underline{m} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \fint_{B^{d_r}_R(x)} \left|\nabla\left(\frac{d_r^{p_i} + d_r^{q_i}}{\sqrt{2}} - d_r^{p_i + p_j}\right)\right|_w^2 d\underline{m} \leq \epsilon$$

が成り立つ. ここで $d_r^p(\cdot) := r^{-1}d(p, \cdot)$, $2e_{p,q}(\cdot) := d(p, \cdot) + d(q, \cdot) - d(p, q)$ である.

上で得られた関数たちを座標関数のようなものだと思い, それらの関数の pmG 収束に関する安定性を用いることで近くの点の接空間に k 本の直線を構成する. すると分裂定理 ([7]) を用いることで極限空間は $\mathbb{R}^k$ と別の RCD 空間との直積で書けることがわかる. したがってその近くの点が $\mathcal{R}_l$ の点である場合, $l \geq k$ でなくてはならない. 以上により $m(\cup_{i \geq k}\mathcal{R}_i) > 0$ がわかる.

References

[1] L. Ambrosio, Andrea Mondino, and Giuseppe Savaré, *Nonlinear diffusion equations and curvature conditions in metric measure spaces*, preprint (2013).

[2] L. Ambrosio and S. Honda, *New stability results for sequences of metric measure spaces with uniform Ricci bounds from below*, arXiv:1605.05349.

[3] J. Cheeger and T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Differential Geom. **46** (1997), no. 3, 406–480. MR1484888 (98k:53044)

[4] T. H. Colding and A. Naber, *Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 2, 1173–1229, DOI 10.4007/annals.2012.176.2.10. MR2950772

[5] M. Erbar, K. Kuwada, and K.-T. Sturm, *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces*, Invent. Math. **201** (2015), no. 3, 993–1071, DOI 10.1007/s00222-014-0563-7. MR3385639

[6] N. Gigli, *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **236** (2015), no. 1113, vi+91, DOI 10.1090/memo/1113. MR3381131

[7] N. Gigli, *The splitting theorem in non-smooth context*, arXiv:1302.5555.

[8] N. Gigli, A. Mondino, and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 5, 1071–1129, DOI 10.1112/plms/pdv047. MR3477230

[9] Y. Kitabeppu, *A sufficient condition to a regular set of positive measure on RCD spaces*, arXiv:1708.04309.

[10] A. Mondino and A. Naber, *Structure theory of metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds I*, arXiv:1405.2222v2.

E-mail address: ybeppu@kumamoto-u.ac.jp