退化移流拡散方程式の質量臨界指数における解の非有界性と質量凝集領域について

和久井洋司　(東北大学　理学研究科)*

$n \geq 3$における, 次の退化移流拡散方程式に対する初期値問題の解の非有界性と球対称解の質量凝集領域について考える:

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \Delta \rho^\alpha + \nabla \cdot (\rho \nabla \psi) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi = \rho, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dDD}$$

ここで, $\alpha = 2 - 2/n$であって, $\rho(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \psi(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は未知関数である. 初期値問題(dDD)の解は弱解(超関数解)として定義される.

定義. $T > 0$に対して, (ρ, ψ)が初期値問題(dDD)の弱解であるとは, (ρ, ψ)が次の条件を満たすときをいう.

1. ほとんど至る$(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$について, $\rho(t, x) \geq 0$.
2. $\rho \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n))$さらに$\nabla \rho^{\alpha - 1/2} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$.
3. 任意の試験関数$\varphi \in C^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^n)$で$\operatorname{supp} \varphi(t) \subset\subset \mathbb{R}^n, 0 \leq t < T$となるものに対し, 次が成立する:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t) \varphi(t)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0 \varphi(0)\, dx \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\rho(s) \partial_t \varphi(s) + \nabla \rho^\alpha \cdot \nabla \varphi(s) + \rho(s) \nabla \psi(s) \cdot \nabla \varphi(s) \Big)\, dx ds, \end{aligned} \tag{1}$$

ただし, $\psi = (-\Delta)^{-1} \rho = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x|^{-(n-2)} * \rho(t)$.

初期値問題(dDD)の解は, 第一式が連続の式であることから, 形式的に質量保存則が成立し, 実際に解の最大存在時間T^*に対して, $\|\rho(t)\|_1 = \|\rho_0\|_1$がすべての$0 < t < T^*$において成り立つ. さらに, (ρ, ψ)が方程式をみたすならば, パラメータ$\lambda > 0$に対して, $\rho_\lambda(t, x) = \lambda^{2/(2-\alpha)} \rho(\lambda^{2/(2-\alpha)} t, \lambda x), \psi_\lambda(t, x) = \lambda^{2/(2-\alpha)-2} \psi(\lambda^{2/(2-\alpha)} t, \lambda x)$ としたとき, $(\rho_\lambda, \psi_\lambda)$も方程式をみたす. 方程式に付随するエントロピー汎関数が定義されかつ, 質量保存則の成立する空間$L^1(\mathbb{R}^n)$を含む$L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n))$において, 初期値問題(dDD)の解の時間大域挙動を考察する.

弱解の存在については, Blanchet-Carrillo-Laurençot [1], Sugiyama-Kunii [4]やSuzuki-Takahashi [5] などが知られている.

---

* e-mail: hiroshi_wakui@m.tohoku.ac.jp

命題 1 ([1], [4], [5]). *$n \geq 3$ とし, $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\rho_0 \geq 0$ に対し, ある $T > 0$ と $[0, T)$ 上の初期値問題 (dDD) の弱解 (ρ, ψ) が存在し, 殆ど至る $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ に対し $\rho(t, x) \geq 0$ で以下を満たす.*

1. $\rho \in C([0, T); L^1(\mathbb{R}^n))$, $\psi \in C([0, T); \dot{W}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n))$.
2. $\|\rho(t)\|_1 = \|\rho_0\|_1, \quad 0 < t < T$.
3. エントロピー汎関数を $H[\rho] := \frac{1}{\alpha-1}\|\rho\|_\alpha^\alpha - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \rho(-\Delta)^{-1}\rho \, dx$ とするとき, 次が成立する:
$$H[\rho(t)] \leq H[\rho_0], \quad 0 \leq t < T. \tag{2}$$
4. $|x|^2\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ならば, 次が成立する:
$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\rho(t)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\rho_0 dx + 2(n-2)\int_0^t H[\rho(s)]ds, \quad 0 < t < T. \tag{3}$$

$\alpha = 2 - 2/n$ の場合, 方程式を保つ尺度変換が L^1 ノルムを保存する尺度変換と一致し, 特に時間大域解の存在と非存在を分類する臨界質量 m_* の存在が知られている:

命題 2 ([1], [5]). *$n \geq 3$ とし, $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\rho_0 \geq 0$ とする. このとき, ある次元に依存する正定数 m_* が存在して, 次が成立する.*

1. $\|\rho_0\|_1 < m_*$ ならば, 解は時間大域的に存在し有界となる.
2. $\|\rho_0\|_1 = m_*$ かつ $|x|^2\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ならば, 解は時間大域的に存在する.
3. $H[\rho_0] < 0$ かつ $|x|^2\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ならば, 解は有限時間で爆発する. すなわち, ある $T^* \in (0, \infty)$ が存在して,
$$\limsup_{t \to T^*} \|\rho(t)\|_\alpha = \infty. \tag{4}$$

注意: $H[\rho_0] < 0$ であるならば, $\|\rho_0\|_1 > m_*$ である.

エントロピー汎関数の評価 (2) と Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式から得られる解の先験的評価により, 初期値 ρ_0 が $\|\rho_0\|_1 < m_*$ をみたせば, 解は時間大域的に存在し, 解の有界性も直ちに従う. さらに, $|x|^2\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり, $H[\rho_0] < 0$ ならば, virial 法則 (3) により, 時間大域解の非存在性が知られているが, その証明は virial 法則 (3) に依拠し, 初期値に課す重みの条件が解の時間大域挙動に与える本質的な影響は議論されていない. そこで, 初期値に対する $|x|^2\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ の仮定を課さない場合に, 時間大域解の非存在性を得ることを目標とし, 以下の定理を得た ([3]):

定理 3. $n \geq 3$ とし, $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\rho_0 \geq 0$ が,

$$H[\rho_0] < 0 \tag{5}$$

をみたすとする. このとき, 次が成立する.

1. 解は有限時間で爆発するか, 時間大域解が存在すれば $L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ で非有界. すなわち, ある $T^* \in (0, \infty]$ が存在して,

$$\limsup_{t \to T^*} \|\rho(t)\|_\alpha = \infty. \tag{6}$$

2. 解 ρ が球対称ならば, 解は有限時間で爆発する.

さらに, Poisson 方程式の球対称に対する L^p ノルムの減衰評価を用いることで, (dDD) の球対称解に対して, 保存量である質量の凝集領域と凝集質量の下からの評価を以下の通りに得た (cf. Tsutsumi [6]):

定理 4. ρ を (dDD) の球対称解であるとする. 正値減少関数 $a(t)$ は, ある $T^* \in (0, \infty)$ に対して, $a(t) \to 0$ $(t \to T^*)$ と次をみたすとする:

$$\frac{(T^* - t)^{1/n}}{a(t)} \to 0 \quad (t \to T^*).$$

解 $\rho(t)$ が T^* において, (6) の意味で爆発すると仮定する. このとき, 次が成立する:

$$\liminf_{t \to T^*} \|\rho(t)\|_{L^1(B_{a(t)}(0))} \geq m_*. \tag{7}$$

さらに, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $K = K(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$\liminf_{t \to T} \|\rho(t)\|_{L^1(B_{K(T^*-t)^{1/n}}(0))} \geq (1 - \varepsilon) m_*$$

が成立する.

参考文献

[1] Blanchet, A., Carrillo, J., Laurençont, Ph., *Critical mass for a Ptlak-Keller-Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions*, Cal. Val. Partial Differential Equations, **35** (2009) 133-168.

[2] Ogawa, T., Wakui, H., *Non-uniform bound and finite time blow up for solutions to a drift-diffusion equation in higher dimensions.* , Anal. Appl., **14** (2016), 145-183.

[3] Ogawa, T., Wakui, H., *Finite time blow-up and non-uniform bound for solutions to a degenerate drift-diffusion equation with the mass critical exponent under non-weight condition*, submitted.

[4] Sugiyama, Y., Kunii, H., *Global existence and decay properties of degenerate Keller-Segel model witha power factor in drift term*, J. Differential Equations, **227** (2006), 333-364.

[5] Suzuki, T., Takahashi, R., *Degenrate parabolic equations with critical exponent derived from the kinetic theory I, Generateion of the weak solution*, Adv. Differential Equations, **14** (2009), 433-476.

[6] Tsutsumi, Y., *Rate of L^2 concentration of blow-up solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical power*, Nonlinear Anal., **15** (1990), 719–724.

[7] Wakui, H., *The rate of concentration for the radially symmetric solution to a degenerate drift-diffusion equation with the mass critical exponent*, submitted.