# On the energy estimate for Klein-Gordon type equations with time dependent singular mass

廣澤 史彦 (山口大学)*

本講演では, 次のような時間に依存する質量を持つ Klein-Gordon 型方程式の初期値問題の解のエネルギー評価について考察する:

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - \Delta + M(t)\right) u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ u(T,x) = u_0(x), \quad u_t(T,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

但し, $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$, $T$ は正定数, $M(t)$ は $(0,T]$ で定義された実数値関数とする.

$v(t,\xi) = \mathcal{F}_x[u(t,x)](t,\xi)$, $\mu \in L^\infty((0,T)) \cap C^1((0,T])$ に対して, $V(t,\xi;\mu(t))$ と $E(t,\xi)$ を次で定義する:

$$V(t,\xi;\mu(t)) = \begin{pmatrix} i|\xi|\mu(t)v(t,\xi) \\ \partial_t(\mu(t)v(t,\xi)) \end{pmatrix}, \quad E(t,\xi)V(T,\xi;\mu(T)) = V(t,\xi;\mu(t)). \tag{2}$$

$M(t) \equiv 0$, $\mu(t) \equiv 1$ の場合, $E(t,\xi)$ はユニタリ行列であり, エネルギー保存則 $\|V(t,\cdot;1)\|_{L^2} \equiv \|V(T,\cdot;1)\|_{L^2}$ が成り立つ. 一方, $M(t) \not\equiv 0$ の場合は一般にはこのようなエネルギー保存則は成り立たない. しかし, 適当な $\mu(t)$ を選ぶことによって generalized energy conservation と呼ばれる次のようなエネルギーのある種の等価性が成り立つことが知られている (cf. [1, 4, 6, 7]):

$$\|V(t,\cdot;\mu(t))\|_{L^2} \simeq^{\dagger} \|V(T,\cdot;\mu(T))\|_{L^2}. \tag{3}$$

本講演では, 特に $M(t)$ が $t \to +0$ で特異性を持つ場合, $\mu(t) \simeq 1$ を満たす $\mu(t)$ が存在して (3) を結論付ける次の評価

$$0 < \inf_{\substack{Y \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ (t,\xi) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n}} \left\{ \frac{\|E(t,\xi)Y\|_{\mathbb{C}^2}}{\|Y\|_{\mathbb{C}^2}} \right\} \quad \text{and} \quad \sup_{\substack{Y \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ (t,\xi) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n}} \left\{ \frac{\|E(t,\xi)Y\|_{\mathbb{C}^2}}{\|Y\|_{\mathbb{C}^2}} \right\} < \infty \tag{4}$$

が成り立つための十分条件について考察する.

$M(t)$ が次の条件を満たす場合には, (4) が成り立つことは容易に示される:

$$\int_t^T |M(s)|\, ds \in L^1((0,T)). \tag{5}$$

一方, (5) が成り立たない場合には一般に (4) は期待できない. 実際 [3] では $M(t) = M_0 t^{-2\beta}$ ($\beta \geq 1$, $M_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) に対して (4) の成立に関して否定的な評価が得られている. これより, $t \to +0$ での

*hirosawa@yamaguchi-u.ac.jp

†正の関数 $f, g$ に対して正定数 $C_1, C_2$ が存在して $C_1 f \leq g \leq C_2 f$ が成り立つとき $f \simeq g$ と表す. また $f \leq C_1 g$ が成り立つとき $f \lesssim g$ と表す.

$M(t)$ の発散オーダーによって (4) 成立の可否が決定されるようにも思われるが, 実際には $M(t)$ が次の評価

$$\exists\beta > 1,\ \ \limsup_{t\to+0} \frac{M(t)}{t^{-2\beta}} = \infty \ \text{ and } \ \lim_{t\to\infty} \int_t^T \int_\tau^T |M(s)|\,ds\,d\tau = \infty \tag{6}$$

を満たすようなよりきつい特異性を持つ場合でも (4) が成り立つ可能性があり, 問題はそれほど単純ではない. このような背景のもと, 本講演における主定理の主張は, $M(t)$ のオーダーの他, その 1 回積分と 2 回積分のオーダーによって (4) が成り立つ十分条件が与えられるというものである.

**定理 1** ([5])**.** $\beta < 1 + \alpha/2$ を満たす正の実数 $\alpha,\ \beta$ に対して $M \in C((0,T])$ が次の評価を満たすとする:

$$|M(t)| \lesssim t^{-2\beta}, \tag{7}$$

$$\left|\int_t^T M(s)\,ds\right| \lesssim t^{-\beta}, \tag{8}$$

$$\left|\int_0^t \int_s^T M(\tau)\,d\tau\,ds\right| \lesssim t^{\alpha}. \tag{9}$$

このとき $\mu(t) \simeq 1$ を満たす $\mu \in C^2((0,T])$ が存在して (4) が成り立つ.

**注意 1.** 定理 1 の条件に関して次に注意する:

(i) $M(t) = M_0 t^{-2\beta}$ の場合, $\beta < 1$ の場合にのみ (9) が成り立つが, これは (5) が成り立つ自明な場合である.

(ii) $M(t)$ が $t \to +0$ で無限に符合変化をする場合には次の評価が成り立つ可能性がある:

$$\limsup_{t\to+0} \frac{\int_t^T M(s)\,ds}{\int_t^T |M(s)|\,ds} = 0.$$

(iii) $\beta > 1$ の場合には, (9) は (8) に対して非自明な仮定である.

**注意 2.** (1) の Klein-Gordon 方程式は, 形式的な変換によって変数係数消散型波動方程式

$$\left(\partial_t^2 - \Delta + b(t)\partial_t\right) u = 0 \tag{10}$$

や, 変数係数波動方程式

$$\left(\partial_t^2 - a(t)^2\Delta\right) u = 0 \tag{11}$$

に帰着可能であり, これらの問題に対する [2, 8] で用いられた解析手法が有効である. しかし, 特に低周波領域の評価において Klein-Gordon 方程式ならではの問題があるため, 定理 1 の結論は他の方程式に関する既知の研究結果から自明なものではない.

**例 1.** $2 < p < q + 1$ を満たす実数 $p, q$ に対して, $M(t)$ を次のように定める:

$$M(t) = t^{-p} \sin t^{-q+1}. \tag{12}$$

このとき $M(t)$ は定理 1 の仮定を満たしている. 実際, $q>1$ かつ $p \le 2q$ であることに注意すると次が成り立つ:

$$|M(t)| \lesssim t^{-p}, \quad \left|\int_t^T M(s)\,ds\right| \lesssim t^{-(p-q)}, \quad \left|\int_0^t \int_s^T M(\tau)\,d\tau\,ds\right| \lesssim t^{2q-p}. \tag{13}$$

ここで $\alpha = 2q-p(>0)$, $\beta = p/2(>1)$ とすると

$$p-q = \beta - \frac{2q-p}{2} < \beta, \quad \beta = 1 + \frac{\alpha}{2} - (q+1-p) < 1 + \frac{\alpha}{2}$$

より, (7), (8), (9) が成り立つことがわかる. ([7] でも同様の問題を扱っているが, (4) の成立のためにはより強い制限 $2 < p < (q+3)/2$ が要求される.)

## 参考文献


[1] Böhme, C., Hirosawa, F., Generalized energy conservation for Klein-Gordon type equations. Osaka J. Math. **49** (2012), 297–323.

[2] Cicognani, M., Hirosawa, F., On the Gevrey well-posedness for second order strictly hyperbolic Cauchy problems under the influence of the regularity of the coefficients. Math. Scand. **102** (2008), 283–304.

[3] Del Santo, D., Kinoshita, T., Reissig, M., Klein-Gordon type equations with a singular time-dependent potential. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **39** (2007), 141–175.

[4] Ebert, M. R., Kapp, R. A., Nascimento, W. N., Reissig, M., Klein-Gordon type wave equation models with non-effective time-dependent potential. M. V. Dubatovskaya; S. V. Rogosin. (Org.), AMADE 2012, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers **60** (2014), 143–161.

[5] Hirosawa, F., On the energy estimate for Klein-Gordon type equations with time dependent singular mass. To appear in proceedings of the 11th ISAAC congress 2017.

[6] Hirosawa, F., On the asymptotic behavior of the energy for the wave equations with time depending coefficients. Math. Ann. **339** (2007), 819–838.

[7] Hirosawa, F., Nascimento, W. N., Energy estimates for the Cauchy problem of Klein-Gordon-type equations with non-effective and very fast oscillating time-dependent potential. To appear in Ann. Mat. Pura Appl. (4).

[8] Hirosawa, F., Wirth, J., $C^m$-theory of damped wave equations with stabilisation. J. Math. Anal. Appl. **343** (2008), 1022–1035.