構造的消散項を持つ波動方程式の解の漸近展開とその応用について

竹田 寛志 (福岡工大・工)

本講演では, 次の構造的消散項を持つ波動方程式の初期値問題について考える：

$$
\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + \nu(-\Delta)^\sigma \partial_t u = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}
$$

ここで, $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\sigma \in (0,1]$, $\nu > 0$ とする.

多くの研究成果の知られる $\sigma = 0$ や $\sigma = 1$ の場合の進展に伴って, 消散項に分数べき微分も許容した形での消散型波動方程式の解の時間減衰も考察されてきた. こういった試みの統一的な取り扱いは, [5] に代表されるように $\sigma = 0$ における解の拡散現象の拡張とみなせる $0 \le \sigma \le \frac{1}{2}$ がよく知られている. 一方で, $\sigma = 1$ の場合の [6] や [8] による解の時間減衰評価と近年の漸近挙動の研究の進展 ([3]) が相まって, [1] をはじめとする $\frac{1}{2} \le \sigma \le 1$ を含む形での解の時間減衰の様相が詳細に調べられた.

命題 1 ([6], [8], [5], [1], [4])**.** $n \ge 2$, $k_0 \ge 0$ とする. このとき, $(u_0, u_1) \in (H^{k_0+1} \cap L^1) \times (H^{k_0} \cap L^1)$ であれば, 初期値問題 (1) は $C([0,\infty); H^{k_0+1}) \cap C^1([0,\infty); H^{k_0})$ において一意的な解 u を持ち, さらに以下が成り立つ.

$$
\|\partial_t^\ell \nabla_x^k u(t)\|_2 \le C(1+t)^{-\gamma_{\sigma,k}-\ell}, \quad 0 < \sigma \le \tfrac{1}{2},
$$

$$
\|\partial_t^\ell \nabla_x^k u(t)\|_2 \le \begin{cases} C\log(t+2), & \frac{1}{2} < \sigma \le 1, n = 2, k = 0, \\ C(1+t)^{-\gamma_{\sigma,k}-\frac{\ell}{2\sigma}}, & \frac{1}{2} < \sigma \le 1, \text{otherwise}, \end{cases}
$$

ここで, k と ℓ は $\ell = 0, 1$ 及び $k \in [0, k_0+1]$, $k + \ell \le k_0 + 1$ を満たすとし,

$$
\gamma_{\sigma,k} := \begin{cases} \frac{n}{4(1-\sigma)} - \frac{\sigma}{1-\sigma} + \frac{k}{2(1-\sigma)}, & 0 < \sigma < \frac{1}{2}, \\ \frac{n}{2} + 1 - k, & \sigma = \frac{1}{2}, \\ \frac{n}{4\sigma} - \frac{1}{2\sigma} + \frac{k}{2\sigma}, & \frac{1}{2} < \sigma \le 1. \end{cases}
$$

命題 1 を受けて, 我々は σ と ν に応じた $t \to \infty$ における解の漸近形を同定し, 解の減衰の最適性を得た.

定理 2 ([4])**.** 命題 1 の仮定の下, 初期値問題 (1) の解 u は $t \to \infty$ において, 以下を満たす.

$$
\|\nabla_x^k (u(t) - m_1 \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{G}_{\sigma,\nu}(t)])\|_2 = \begin{cases} o(\log(t+2)), & \frac{1}{2} < \sigma \le 1, n = 2, k = 0, \\ o(t^{-\gamma_{\sigma,k}}), & 0 < \sigma \le 1, \text{otherwise}, \end{cases}
$$

$$
\|\partial_t \nabla_x^k (u(t) - m_1 \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{G}_{\sigma,\nu}(t)])\|_2 = o(t^{-\gamma_{\sigma,k}-1}), \quad 0 < \sigma \le \tfrac{1}{2},
$$

$$
\|\partial_t \nabla_x^k u(t) - \nabla_x^k m_1 \mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{\nu t|\xi|^{2\sigma}}{2}} \cos(t|\xi|)]\|_2 = o(t^{-\gamma_{\sigma,k}-\frac{1}{2\sigma}}), \quad \tfrac{1}{2} < \sigma \le 1.
$$

ここで, $m_1 := \int_{\mathbb{R}^n} u_1(y)dy$,

$$
\mathcal{G}_{\sigma,\nu}(t,\xi) := \begin{cases}
\dfrac{e^{-\frac{1}{\nu}t|\xi|^{2(1-\sigma)}}}{\nu|\xi|^{2\sigma}} \quad \text{for} \quad 0 < \sigma < \frac{1}{2}, \nu > 0, \\[2ex]
\dfrac{2e^{-\frac{\nu}{2}t|\xi|} \sin\left(\frac{t|\xi|\sqrt{4-\nu^2}}{2}\right)}{|\xi|\sqrt{4-\nu^2}} \quad \text{for} \quad \sigma = \frac{1}{2},\ 0 < \nu < 2, \\[2ex]
te^{-t|\xi|} \quad \text{for} \quad \sigma = \frac{1}{2},\ \nu = 2, \\[2ex]
\dfrac{2e^{-\frac{\nu}{2}t|\xi|} \sinh\left(\frac{t|\xi|\sqrt{\nu^2-4}}{2}\right)}{|\xi|\sqrt{\nu^2-4}} \quad \text{for} \quad \sigma = \frac{1}{2},\ \nu > 2, \\[2ex]
\dfrac{e^{-\frac{\nu}{2}t|\xi|^{2\sigma}} \sin(t|\xi|)}{|\xi|} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} < \sigma \le 1,\ \nu > 0.
\end{cases}
$$

そのため, $m_1 \neq 0$ であれば, ある $C > 0$ が存在して, 十分大きい t, 及び, $\ell = 0, 1$, $k \in [0, k_0+1]$, $k + \ell \le k_0 + 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
C^{-1}t^{-\gamma_{\sigma,k}-\ell} \le \|\partial_t^\ell \nabla_x^k u(t)\|_2 \le Ct^{-\gamma_{\sigma,k}-\ell}, \quad 0 < \sigma \le \tfrac{1}{2}, \\
C^{-1}t^{-\gamma_{\sigma,k}-\frac{\ell}{2\sigma}} \le \|\partial_t^\ell \nabla_x^k u(t)\|_2 \le Ct^{-\gamma_{\sigma,k}-\frac{\ell}{2\sigma}}, \quad \tfrac{1}{2} \le \sigma \le 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ.
また, この漸近展開の応用として, [2], [7] によって解のエネルギー減衰や時間減衰評価が得られている構造的消散項を持つ弾性波の漸近挙動が同定できることも言及する. 本研究は池畠良氏 (広島大) との共同研究に基づく.

References

[1] D'Abbicco, M. and Reissig, M., Semilinear structural damped waves, Math. Methods Appl. Sci. 37(11)(2014), 1570-1592.

[2] Ikehata, R., Charão, R. C. and da Luz, Cleverson R., *Optimal decay rates for the system of elastic waves in $\mathbb{R}^n$ with structural damping*, J. Evol. Equ. 14 (2014), 197-210.

[3] Ikehata, R., Asymptotic profiles for wave equations with strong damping, J. Differential Equations 257 (2014), 2159-2177.

[4] Ikehata, R. and Takeda H., *Asymptotic profiles of solutions for structural damped wave equations*, arXiv:1607.01839.

[5] Karch, G., Selfsimilar profiles in large time asymptotics of solutions to damped wave equations. Studia Math. 143 (2000), 175-197.

[6] Ponce, G., Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations, Nonlinear Anal. 9 (1985), no. 5, 399-418.

[7] Reissig, M., *Structurally damped elastic waves in 2D*, Math. Methods Appl. Sci. **39** (2016), 4618-4628.

[8] Shibata, Y., On the rate of decay of solutions to linear viscoelastic equation, Math. Methods Appl. Sci. 23 (2000), no. 3, 203-226.