Large time behavior of solutions to 1D quasilinear wave equations for the elasticity

杉山 裕介 *
滋賀県立大学

この講演では、まず次の空間一次元準線形波動方程式を考える：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x((1+u)^{2a}\partial_x u), & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

ここで $u(t,x)$ は、実数値未知関数、 a は、正定数とする。この方程式は、弾性体もしくは弾塑性体の理論に現れる偏微分方程式である。

この講演では常に次のことを仮定する：ある正定数 c_0 があって、任意の $x \in \mathbb{R}$ について次を満たす：

$$1 + u_0(x) \geq c_0. \tag{2}$$

この仮定によって、(1) の方程式を時刻 0 の付近で strictly hyperbolic であると言うことができる. このことから、よく知られた時間局所解の一意存在定理を適用することで時間局所解が構成される。しかしこの時間局所解は、必ずしも時間大域的には延長されない。次の 2 種類の現象のうちのどちらかが発生した時、解（上述の時間局所解の存在定理で構成された解）の存在が停止する。一つ目は、解の爆発（もしくは衝撃波）と呼ばれる次の現象：

$$\overline{\lim_{t \nearrow T_1}} (\|\partial_t u(t)\|_{L^\infty} + \|\partial_x u(t)\|_{L^\infty}) = \infty.$$

二つ目は、「方程式の退化」という次の現象である：

$$\lim_{t \nearrow T_2} \inf_{(s,x) \in [0,t] \times \mathbb{R}} 1 + u(s,x) = 0.$$

方程式の退化が（有限時間で）起こるとき、方程式は、その strictly hyperbolicity を失う. そして、一般には、 strictly hyperbolicity が失われた方程式に対しては、解の滑らかさの透徹性 (persistency) が保証されない。この講演の目的は、方程式の退化が起こるための十分条件を探ることである。次の主定理は、有限時間において方程式の退化が起こるための十分条件を与える。

Theorem 1. $(u_0, u_1) \in H^3(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$ とする. 初期値 (u_0, u_1) は、 (2) を満たすとして、さらに次の 2 条件を仮定する：

$$u_1(x) \pm (1 + u_0(x))^a \partial_x u_0(x) \leq 0 \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\int_{\mathbb{R}} u_1(x)dx < \frac{-2}{a+1}. \tag{4}$$

このとき、 有限時間で方程式の退化が起こる。

(1) の方程式は、次の双曲型保存則系の形で書くことができる:

$$\partial_t \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} - \partial_x \begin{pmatrix} V \\ \dfrac{(1+U)^{2a+1}}{2a+1} \end{pmatrix} = 0$$

ここで $U(t,x) = u(t,x)$, $V(t,x) = \int_{-\infty}^x \partial_t u(t,y)dy$. より一般の二階の双曲型保存則系に対する時間大域解の存在定理の結果は、古くからよく知られている。 (e.g. Johnson [1] and Yamaguchi and Nishida [5]). それらを適用することで、次の命題が得られる：

*e-mail:sugiyama.y@e.usp.ac.jp

Proposition 2. $(u_0, u_1) \in H^3(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$ とする．初期値 (u_0, u_1) について、(2)、(3) と次の条件を仮定する：

$$\int_{\mathbb{R}} u_1(x)dx > \frac{-2}{a+1}.$$

このとき、(1) は、次 $u \in C([0,\infty); H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0,\infty); H^2(\mathbb{R}))$ を満たす時間大域解を持ち、さらにある定数 $c_1 > 0$ があって、全ての $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$ について次を満たす：

$$1 + u(t,x) \geq c_1.$$

Proposition 2 と Theorem 1 は、 (3) という仮定のもとで、$\frac{-2}{a+1}$ が、方程式の退化させない時間大域解の存在と有限時間での退化の発生を分ける $\int_{\mathbb{R}} u_1(x)dx$ の閾値であることを主張している。仮定 (3) は、リーマン不変量が時刻 0 において、x について単調現象であることを述べており。この性質は、$t \geq 0$ にも伝搬する．さらに、もし仮定 (3) が満たされない場合は、爆発解を構成することができる。

続いて、次のようなパラメータ付き空間 1 次元準線形波動方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = (1+u)^{2a}\partial_x^2 u + a\lambda(1+u)^{2a-1}(\partial_x u)^2,, & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5}$$

ここパラメータ λ は、$0 \leq \lambda \leq 2$ を満たすとする．$\lambda = 0, 1$ または 2 の場合、(5) は、物理的な意味を持つ。$\lambda = 2$ のとき、(5) は、(1) に一致する。$\lambda \neq 2$ の場合, (5) の方程式は、双曲型保存則系の構造を持っておらず、$\int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t)dx$ は、保存量ではないが、「時間変化に伴ってリーマン不変量が単調減少性を保持」するという性質を $0 \leq \lambda \leq 2$ の場合に持っており、これが研究の動機である。[2, 4] において、$0 \leq \lambda < 2$ の場合に方程式の退化が起こるための条件を与えた。その条件には、$\int_{\mathbb{R}} u_1 dx$ は現れない。

Theorem 3. $0 \leq \lambda < 2$ とする。$(u_0, u_1) \in H^3(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$ かつ $u_1 \not\equiv 0$ する。初期値 (u_0, u_1) について、(2) と (3) を仮定すると有限時間で方程式の退化が起こる。

Theorems 1, 3 の証明においては、$F(t) = -\int_{\mathbb{R}} u(t,x) - u_0(x)dx$ に対する背理法が使われる。証明のアイデアは、は F の積分領域 $\mathbb{R}$ を交わらない特性曲線によって、3 つに分割し、それぞれにおいてリーマン不変量を用いて評価することである。

References

[1] J. L. Johnson, Global continuous solutions of hyperbolic systems of quasilinear equations, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), pp. 639-641.

[2] Y. Sugiyama, Global existence of solutions to some quasilinear wave equation in one space dimension, Differential Integral Equations, 6 (2013), pp. 487-504.

[3] Y. Sugiyama, Degeneracy in finite time of 1D quasilinear wave equations, SIAM J. Math. Anal., 48 (2016) 847-870.

[4] Y. Sugiyama, Degeneracy in finite time of 1D quasilinear wave equations II, Evolution Equations and Control Theory, 6 (2017) 615-628.

[5] M. Yamaguchi and T. Nishida, On some global solution for quasilinear hyperbolic equations, Funkcial. Ekvac., 11 (1968), pp. 51-57.