Diffusion wave property and smoothing effect for solution to the compressible Navier-Stokes-Korteweg system

津田　和幸　(大阪大学基礎工学研究科)[1]

全空間 $\mathbb{R}^n$ における圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} m = 0, \\ \partial_t m + \operatorname{div} \Big(\frac{m \otimes m}{\rho}\Big) + \nabla P(\rho) = \operatorname{div} \Big(\mathcal{S}(\frac{m}{\rho}) + \mathcal{K}(\rho)\Big), \\ \rho(x,0) = \rho_0, \quad m(x,0) = m_0. \end{cases} \qquad \text{(CNSK)}$$

を考える．ここで $\rho = \rho(x,t)$, $v = (m_1(x,t), \cdots, m_n(x,t))$ $(x \in \mathbb{R}^n, n \geq 2, t > 0)$ はそれぞれ各点・各時刻での流体の密度, 運動量 を表し, すべて未知量である．$P = P(\rho)$ は圧力項であり, ρ について滑らかな関数で, 与えられた正定数 ρ_* に対して $P_\rho(\rho_*) > 0$ を仮定する．$\mathcal{S}$ は粘性によるストレステンソルを表し, $(\mathcal{S})_{ij} = \mu' \operatorname{div} v\, \delta_{i,j} + 2\mu d_{ij}(v)$, ただし $d_{ij}(v) = \frac{1}{2}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, v は速度場で $v = m/\rho$ と定義される．μ と μ' は粘性係数を表し, ともに定数で $\mu > 0$ かつ $\mu' + \frac{2}{n}\mu \geq 0$ をみたすとする．$\mathcal{K}$ は Kortwerg ストレステンソルと呼ばれ,

$$(\mathcal{K})_{ij} = \kappa \Big\{ \frac{1}{2}(\Delta \rho^2 - |\nabla \rho|^2)\delta_{i,j} - \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \Big\}, \quad \kappa > 0.$$

で定義される．κ は正定数とする．$\kappa = 0$ とすると準線形双曲-放物型方程式である圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (CNS) が得られる．　ここでは (1) の定数状態 $(\rho_*, 0)$ のまわりでの解の時間大域的挙動について考える．

CNSK は水と水蒸気のように単一成分で液相・気相の二相状態を相転移を伴いながらもつ圧縮性流体の動きを表す．相転移を記述するために拡散界面を用いている．Van der Waals (1893), Korteweg (1901) らのアイデアに基づき, Dunn and Serrin (1985) がモデルを提唱した．(近年では, 例えば Heida and Málek (2010) がモデルを導出している.)

CNS については, Matsumura and Nishida(1979) により 3 次元で十分小さな初期値に対する時間大域解の存在が得られた．初期値が L^1 に入るとき, 解の L^2 ノルムが方程式の放物型の側面を受けて熱方程式の解と同じ rate で減衰すること:

$$\|\nabla^k(\rho - \rho_*, v)\|_{L^2} = O(t^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}}), \quad (k = 0, 1)$$

が示された．この結果は Ponce (1983) により L^p ノルムただし $p \geq 2$ の結果に拡張された．一方 Hoff and Zumbrun(1995,1997) は $1 \leq p < 2$ のとき解の L^p ノルムは熱方程式の解よりも減衰が遅くなることを示した．これは $1 \leq p < 2$ のときに主要部となる項が多次元波動方程式の解作用素の spreading effect の影響を受けることに起因する．一方 $p \geq 2$ では spreading effect によりその項は熱より速く減衰する．(これらの性質を diffusion wave property と呼ぶ) Kobayashi and Shibata (2002) は線形化 CNS についてさらに詳細な解析を行った．解を低周波部分と高周波部分に分け, 低周波部分は $L^\infty - L^1$ 評価と $L^1 - L^1$ 評価で diffusion wave property を示し, 高周波部分は解が指数減衰することが示された．

[1]本研究は大阪大学の小林孝行教授との共同研究に基づく．

CNSKの十分小さな初期値に対する時間大域解の存在については, Hattori and Li (1994, 1998) が適当なSobolev空間で可解性を示した. Danchin and Desjardins (2001), Tan and R. Zhang, X. Zhang and Tan (2014), Tan, Wang and Xu (2012) により, 臨界Besov空間や正則性のより低いSobolev空間などにおいても示されている. Wang and Tan (2011) により3次元での解の減衰評価が考察され, 解は方程式の放物型の側面を受けて, 熱方程式と同じ減衰をすること: $\|(\rho_0, v_0)\|_{(H^{s+1}\times H^s)\cap L^1} << 1$ $(s \geq [n/2]+3=4) \Longrightarrow$

$$\|(\rho(t)-\rho_*, v(t))\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} \quad (2 \leq p \leq \infty).$$

が示された.

本講演ではまず線形化されたCNSKの解の減衰評価を, 方程式の双曲型の側面から来るdiffusion wave propertyを含めて考察する. その際高周波部分についてはCNSの場合と異なり, 解のsmoothing effectが得られた. 実際に以下の結果が得られた.

Theorem 1.

$$\text{(i)}\ \left\|\partial_t^j\partial_x^\alpha\Big\{\begin{pmatrix}\phi\\ m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ \mathcal{K}_\nu * m_{0,in}\end{pmatrix}\Big\}\right\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-\left(\frac{3n-1}{4}+\frac{j+|\alpha|}{2}\right)}\|u_0\|_{L^1},$$

$$u_0={}^\top(\phi_0,m_0),\quad \phi=\rho-\rho_*,\quad \mathcal{K}_\nu=\mathcal{F}^{-1}(e^{-\nu|\xi|^2t}),\quad m_{0,in}=\mathcal{F}^{-1}\Big\{\Big(I_n-\frac{\xi^\top\xi}{|\xi|^2}\Big)m_0\Big\}.$$

(ii) (L^∞ *estimate for* E_1) $t>0$ に対して,

$$\begin{aligned}&\|\partial_t^j\partial_x^\alpha E_{1,\phi}(t)(\phi_0,m_0)\|_{L^\infty}\\ &\quad\leq\ C_{j,\alpha,n}(1+t)^{-\left(\frac{3n-1}{4}+\frac{j+|\alpha|}{2}\right)}[\|\phi_0\|_{L^1}+\|m_0\|_{L^1}];\\ &\|\partial_t^j\partial_x^\alpha E_{1,m}(t)(\phi_0,m_0)\|_{L^\infty}\\ &\quad\leq\ C_{j,\alpha,n}(1+t)^{-\left(\frac{3n-1}{4}+\frac{j+|\alpha|}{2}\right)}[\|\phi_0\|_{L^1}+\|m_0\|_{L^1}]\\ &\qquad\quad +C_{j,\alpha,n}(1+t)^{-\left(\frac{n}{2}+\frac{j+|\alpha|}{2}\right)}\|m_0\|_{L^1}.\end{aligned}$$

ただし E_1 は解の低周波部分, $E_{1,\phi}$ は解の低周波部分の密度パートを表す. m についても同様.

(iii) (L^1 *estimate for* E_1) $n\geq 3$ かつ n が奇数のとき,$t>0$ に対して

$$\begin{aligned}&\|\partial_t^j\partial_x^\alpha E_1(t)(\phi_0,m_0)\|_{L^1}\\ &\quad\leq\ C_{j,\alpha,n}(1+t)^{\frac{n-1}{4}-\frac{j+|\alpha|}{2}}[\|\phi_0\|_{L^1}+\|m_0\|_{L^1}].\end{aligned}$$

(iv) (L^p-L^q *estimate for* E_1) $t>0$ かつ $1\leq q\leq 2\leq p\leq\infty$ に対して,

$$\begin{aligned}&\|\partial_t^j\partial_x^\alpha E_1(t)(\phi_0,m_0)\|_{L^p}\\ &\quad\leq\ C_{j,\alpha,n}(1+t)^{-\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)+\frac{j+|\alpha|}{2}\right)}[\|\phi_0\|_{L^q}+\|m_0\|_{L^q}].\end{aligned}$$

(v) (L^p-L^p *estimate for* E_∞)
Let $1\leq p\leq\infty$. $t>0$, $|\alpha|\geq 0$ に対して

$$\|\partial_t^j\partial_x^\alpha u_\infty\|_{L^p}\leq Ce^{-ct}\{(1+t^{-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}-j})\Big[\|\phi_0\|_{L^p}+\|m_0\|_{L^p}\Big]+t^{-1-\frac{|\alpha|}{2}-k}\|\phi_0\|_{L^p}\}.$$

ただし E_∞ は解の高周波部分を表す.

さらにそれらの評価を応用して, 非線形問題 (CNSK) の解についてもdiffusion wave propertyを含めた解の減衰評価が得られたことを報告する. その際初期値のレギュラリティーを先行研究より低くとることに成功したことも報告する.

References

[1] J.E. Dunn and J. Serrin, On the thermomechanics of interstitial working, Arch. Rational Mech. Anal., **88** (1985), pp. 95–133.

[2] H. Hattori and D. N. Li, Global Solutions of a High Dimensional System for Korteweg Materials, J. Math. Anal. Appl., **198** (1998), pp. 84–97.

[3] M. Heida and J. Málek, On compressible Korteweg fluid-like materials, Internat. J. Engrg. Sci., **48** (2010), pp. 1313–1324.

[4] D. Hoff and K. Zumbrun, Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow, Indiana Univ. Math. J., **44** (1995), pp.603–676.

[5] D. Hoff and K. Zumbrun, Pointwise decay estimates for multidimensional Navier-Stokes diffusion waves, Z. Angew. Math. Phys., **48** (1997), pp.597–614.

[6] T. Kobayashi and Y. Shibata, Remark on the rate of decay of solutions to linearized compressible Navier-Stokes equations, Pacific Journal of Mathematics, **207** (2002), pp. 199–234.

[7] Y. Wang and Z. Tan, Optimal decay rates for the compressible fluid models of Korteweg type, J. Math. Anal. Appl., **379** (2011), pp. 256–271.