ある準線形方程式の自由境界問題に対する近似解の収束率

小杉 卓裕 (福岡工業大学)

適切な仮定の下においてエネルギー汎函数

$$I(v) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |Dv|^2 - fv \right) dx \quad \text{for } v \in H_0^1(\Omega)$$

を $H_0^1(\Omega)$ の閉凸部分集合 K 上最小化する函数 $w = \inf_K v \in H_0^1(\Omega)$ が一意に存在することはよく知られている. 閉凸部分集合 K として函数の上と下から制限がついた集合

$$K := \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \;\middle|\; \Psi_0 \le v \le \Phi_0 \quad \text{a.e. in } \Omega \right\}$$

ととった変分問題は障害物問題と呼ばれ, そのオイラー・ラグランジュ方程式は次のようになる:

$$\min \{ \max \{ -\Delta w - f,\ w - \Phi_0 \},\ w - \Psi_0 \} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

本講演ではグラフの平均曲率流方程式の障害物問題を考える:

$$\begin{cases} \min \left\{ \max \left\{ \partial_t u - \operatorname{tr} \left[\left(I - \dfrac{Du \otimes Du}{1 + |Du|^2} \right) D^2 u \right],\ u - \Phi \right\},\ u - \Psi \right\} = 0 & \text{in } \mathbb{T}^n \times (0, \infty), \\ u = g & \text{in } \mathbb{T}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ とし, 障害物 $\Phi, \Psi \in C^{2,1}(\mathbb{T}^n \times [0, \infty))$ は次をみたすとする.

$$\Psi \le \Phi \quad \text{in } \mathbb{T}^n \times [0, \infty) \quad \text{and} \quad \Psi \le g \le \Phi \quad \text{in } \mathbb{T}^n \times \{0\}$$

障害物問題を考える場合, 方程式の複雑さからしばしば処罰法による近似方程式を建てる:

$$\begin{aligned} &\partial_t u - \varepsilon \Delta u^\varepsilon - \operatorname{tr} \left[\left(I - \frac{Du^\varepsilon \otimes Du^\varepsilon}{1 + |Du^\varepsilon|^2} \right) D^2 u^\varepsilon \right] \\ &\qquad\qquad + \beta \left(\frac{u^\varepsilon - \Phi}{\varepsilon} \right) - \beta \left(\frac{\Psi - u^\varepsilon}{\varepsilon} \right) = 0 \quad \text{in } \mathbb{T}^n \times (0, \infty). \end{aligned} \tag{2}$$

ここで初期値は $u^\varepsilon(\cdot, 0) = g$ とし, $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$ はリプシッツ連続かつ凸で次をみたす函数とする.

$$\beta(r) := \begin{cases} 0 & \text{for } r \le 0, \\ r - 1 & \text{for } r \ge 2. \end{cases}$$

方程式 (2) は古典解 u^ε をもち, 方程式 (1) の一意粘性解 u に局所一様収束することが知られている. 本講演の目的はこの収束の収束率を求めることである.

ハミルトン・ヤコビ方程式に対して粘性消滅項を加えたことによる近似方程式の近似解の収束率は, 1964 年 Fleming [4, 5] により確率ゲーム的に, 1984 年に Crandall-Lions [2] により粘性解的に導かれた. また, 2010 年には Evans [3] が非線形随伴法を導入し, 同様の結果を得ている. その

後, 非線形随伴法を用いた関連する結果として [8], [1], [7] が挙げられる. Koike-Kosugi-Naito [6] では非線形随伴法を用いることで, 有界領域上における 2 階の線形楕円型方程式の障害物問題及び勾配拘束問題について処罰方程式による近似解の収束率を得ている.

本研究により次の結果を得た.

定理 1. 方程式 (2) の古典解を u^ε, 方程式 (1) の粘性解とする. 任意の $T > 0$ に対して,

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n \times [0,T])} = O(\varepsilon) \quad as\ \varepsilon \to 0$$

が成り立つ.

この定理を得るために Evans [3] が導入した非線形随伴法を用いる. すなわち, (2) に対する線形化作用素の随伴作用素を L^* とするとき次の方程式を考える:

$$\begin{cases} -\partial_t \sigma + L^* \sigma = 0 & \text{in } \mathbb{T}^n \times [0, \hat{T}], \\ \sigma(x, \hat{T}) = \delta_{\hat{x}} & \text{for } x \in \mathbb{T}^n. \end{cases} \tag{3}$$

ここで, $\hat{x} \in \mathbb{T}^n$, $\hat{T} \in (0, \infty)$ とし, $\delta_{\hat{x}}$ は $\hat{x}$ におけるディラック測度を表す. 随伴方程式 (3) について以下の補題を得ることにより定理 1 が導かれる.

補題 2. *1.* $\sigma \geq 0 \quad in\ \mathbb{T}^n \times [0, \hat{T}]$.

2. ある定数 $C = C(\hat{T})$ が存在して次が成り立つ:

$$\int_0^{\hat{T}} \int_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{\beta'(u^\varepsilon - \Phi)}{\varepsilon} + \frac{\beta'(\Psi - u^\varepsilon)}{\varepsilon} + 1 \right) \sigma dx dt \leq C.$$

3. ある定数 $C = C(\hat{T}, \Phi, \Psi)$ が存在して次が成り立つ:

$$\int_0^{\hat{T}} \int_{\mathbb{T}^n} |D^2 u^\varepsilon|^2 \sigma dx dt \leq C.$$

参考文献

[1] F. Cagnetti and D. Gomez and H. V. Tran, Adjoint methods for obstacle problems and weakly coupled systems of PDE. ESAIM Control Optim. Calc. Var. **19** (2013), no. 3, 754-779.

[2] M. G. Crandall and P.-L. Lions, Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations, Math. Comp. **43** (1984), no. 167, 1-19.

[3] L. C. Evans, Adjoint and compensated compactness methods for Hamilton-Jacobi PDE, Arch. Ration. Mech. Anal. **197** (2010), no. 3, 10531088.

[4] W. Fleming, The convergence problem for differential games II, Advances in Game Theory, Princeton University Press, Princeton, 195-210, 1964.

[5] W. Fleming, The Cauchy problem for degenerate parabolic equations, J. Math. Mech. **13** (1964), 987-1008.

[6] S. Koike, T. Kosugi and M. Naito, On the rate of convergence of solutions in free boundary problems via penalization, J. Math. Anal. Appl. **457** no. 1 (2018), 436-460.

[7] H. Mitake and H. V. Tran, Large-time behavior for obstacle problems for degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations. Calc. Var. Partial Differential Equations **54** (2015), no. 2, 2039-2058.

[8] H. V. Tran, Adjoint methods for static Hamilton-Jacobi equations, Calc. Var. Partial Differential Equations **41** (2011), no. 3-4, 301319.