Initial value problem for a dissipative nonlinear Schrödinger equation with large data

星埜 岳* (大阪大学 理学研究科 学振PD)

1. はじめに

次の非線形シュレディンガー方程式の初期値問題について考える:

$$\begin{cases} i\partial_t u + (\Delta/2)u = \lambda |u|^{p-1}u, \ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0) = \phi \in \mathcal{F}H^\gamma. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, 空間次元 $n \geq 1$, $i = \sqrt{-1}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$, $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}H^\gamma = \left\{ \phi \in L^2;\ \|\phi\|_{\mathcal{F}H^\gamma} := \max\left(\|\phi\|_{L^2}, \||x|^\gamma \phi\|_{L^2}\right) < \infty \right\},\ \gamma > 0,$$

非線形冪 $1 + 4/(n+2\gamma) < p < 1 + 4/n$ と係数 $\lambda \in \mathbb{C}$. また $L^q = L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq q \leq \infty$ はルベーグ空間. 係数が $\lambda \in \mathbb{R} + i(-\infty, 0)$ の場合にアプリオリ評価:

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{L^2},\ t > 0$$

が知られており, この場合のシュレディンガー方程式は消散型非線形シュレディンガー方程式と呼ばれている. 今回は消散型の場合を時間が正の方向 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ で考察する. 考える問題は次の時間大域解の散乱の問題である:

Problem 1. 初期値が $\phi \in \mathcal{F}H^\gamma$ に属し任意の大きさのノルムをもつとき, $e^{-it\Delta/2}u \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{F}H^\gamma)$ なる時間大域解で次の性質を満たすものは存在するか:

$$\exists_1 \phi_+ \in \mathcal{F}H^\gamma \ s.t. \lim_{t\to+\infty} \left\| e^{-it\Delta/2}u(t) - \phi_+ \right\|_{\mathcal{F}H^\gamma} = 0.$$

2. 先行研究

J. E. Barab (1984) によって $\lambda > 0$ に対して $1 < p \leq 1 + 2/n$ のときに L^2 における非自明な漸近自由解の非存在が示されている. その意味で $p = 1 + 2/n$ は臨界指数である. 以下の先行研究の結果は時間の負の方向 $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ においても成り立っている.

小さな初期値に対して

[2] において非線形項の係数 $\lambda \in \mathbb{C}$ が任意の複素数である場合に

$$0 < \gamma < \min(n/2, p),\ 1 + \frac{4}{n+2\gamma} \leq p \leq 1 + \frac{4}{n}$$

に対し初期値のノルム $\|\phi\|_{\mathcal{F}H^\gamma}$ が十分小さいという条件のもと時間大域解の散乱が示されている.

大きな初期値に対して

[2] では非線形項の係数が条件 $\lambda > 0$ を満たす場合に任意の大きさのノルム $\|\phi\|_{\mathcal{F}H^1}$ をもつ初期値について非線形冪

$$p_S(n) \leq p < 1 + \frac{4}{n}$$

に対して散乱が示されている. ここで, $p_S(n) := 1 + (2 - n + \sqrt{n^2 + 12n + 2})/2n$.

* 本研究は JSPS 特別研究員奨励費 17J00785 の助成を受けたものです.

3. 主結果

本研究では係数λに対して以下の条件を課す:

$$\lambda \in \Lambda_p := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} + i(-\infty, 0);\ \frac{p-1}{2\sqrt{p}} |\mathrm{Re}(\lambda)| \le |\mathrm{Im}(\lambda)| \right\}.$$

$\gamma_S(n) := 2/(p_S(n)-1) - n/2$ とおく. 次の関係式をみたす(r, q) は許容指数組と呼ばれる: $2/r = n(1/2 - 1/q)$, ここでq の範囲はソボレフの埋め込み$H^1 \subset L^q$ におけるものと同じ範囲である. 主結果を述べる:

Theorem 1 (G. H., J. Differ. Equ, accepted)**.** $n \ge 1$ とする. 次を仮定する

$$\gamma_S(n) < \gamma \le \min(n/2, 1),\ 1 + \frac{4}{n+2\gamma} < p < 1 + \frac{4}{n} \text{ と } \lambda \in \Lambda_p.$$

このとき$\phi \in \mathcal{F}H^\gamma$ に対して(1) は$u, |J|^\gamma u \in C(\mathbb{R}_+; L^2)$ なる一意的な時間大域解をもつ. さらに$\phi_+ \in \mathcal{F}H^\gamma$ が一意的に存在し

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| e^{-it\Delta/2} u(t) - \phi_+ \right\|_{\mathcal{F}H^\gamma} = 0$$

が成り立つ. ここで$|J|^\gamma(t) = e^{it\Delta/2} |x|^\gamma e^{-it\Delta/2}$, $t \ge 0$.

Remark 1. 条件$\gamma > \gamma_S(n)$ としたことにより$1 + 4/(n+2\gamma) < p_S(n)$ となっている. つまり$\lambda > 0$ の場合は$p \ge p_S(n)$ に対し散乱が示されているが本研究では$\lambda \in \Lambda_p$ の場合に$p < p_S(n)$ に対しても散乱を示した. この点が本研究の新しい点の一つである.

4. 証明の要点

ストリカーツ評価式を用いて縮小写像の方法で積分方程式の解として時間局所解を構成できる. アプリオリ評価式

$$\| |J|^\gamma(t) u(t) \|_{L^2} \le C \| |x|^\gamma u(0) \|_{L^2},\ t \ge 0$$

を示すことで解の延長の論法が適用でき$e^{-it\Delta/2} u \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{F}H^\gamma)$ なる時間大域解が構成できる. [1] において仮定$\lambda \in \Lambda_p$ のもと上記のアプリオリ評価式の$\gamma = n = 1$ の場合が示されているが本研究では$0 < \gamma < 1, n \ge 1$ の場合を扱うので別の証明が必要である. 証明には方程式のガリレイ不変性, 斉次ソボレフ空間におけるセミノルムの差分商による表現と[1] で示されている消散型非線形項の差に対する評価式を用いる. $0 < \gamma < 1$に対するアプリオリ評価式の証明は本研究の主なアイデアの一つである. 漸近自由性は時間大域解に対してソボレフの埋め込みと$|J|^\gamma$ の別表現$|J|^\gamma(t) = e^{i|x|^2/2t} (-t^2\Delta)^{\gamma/2} e^{-i|x|^2/2t}$, $t \ne 0$ を用いて, 時間減衰評価式$\|u(t)\|_{L^r} \le C t^{-\alpha} \|\phi\|_{\mathcal{F}H^\gamma}$, $t > 0$ を適当な$r > 2$ と$\alpha > 0$ に対して示すことによって証明できる.

参考文献

[1] N. Kita and A. Shimomura, *Large time behavior of solutions to Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity for arbitrarily large initial data,* J. Math. Soc. Jpn. **61**, (2009), 39–64.

[2] K. Nakanishi and T. Ozawa, *Remarks on scattering for nonlinear Schrödinger equations,* NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. **9**, (2002), 45–68.