完全非線形方程式の両側障害問題の L^p-粘性解について

舘山　翔太　（東北大学）

よく知られるように, エネルギー汎関数

$$J[v] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Dv|^2 - fv \right) dx$$

に対して, $\min_{v \in H_0^1(\Omega)} J[v] = J[u]$ を満たす $u \in H_0^1(\Omega)$ は一意に存在して, さらに $-\Delta u = f$ in Ω を超関数の意味で満たす. さらに, 与えられた関数 φ, ψ に対して, その間にあるという制約条件を $H_0^1(\Omega)$ に付け加えた閉凸部分集合

$$K := \{ v \in H_0^1(\Omega) \mid \varphi \le v \le \psi \text{ a.e. in } \Omega \}$$

を導入すると, K 上において J を最小化する関数 $u \in H_0^1(\Omega)$ も一意に存在して, 次の方程式を満たすことが知られている. これは両側障害問題と呼ばれ, 特に発散型の障害問題は変分不等式としても表されるが, これまで数多く研究されている ([5], [1] 等).

$$\min\{\max\{-\Delta u - f, u - \psi\}, u - \varphi\} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

本講演では, 次の非発散型の両側障害問題の L^p-粘性解の存在と regularity を考察する.

$$\min\left\{\max\left\{F(x, Du, D^2u) - f, u - \psi\right\}, u - \varphi\right\} = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし, 障害 φ, ψ は

$$\varphi, \psi \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{such that} \quad \varphi \le \psi \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad \varphi \le 0 \le \psi \quad \text{on } \partial\Omega \tag{2}$$

を満たすとし, 非斉次項 f は次を満たすとする.

$$f \in L^p(\Omega) \quad \text{for } p > p_0. \tag{3}$$

ここで, $p_0 \in [\frac{n}{2}, n)$ は [4] の定数である. また, 楕円定数 $0 < \lambda \le \Lambda$ とある関数

$$\mu \in L^q(\Omega) \quad \text{for } q > n, q \ge p \tag{4}$$

が存在して, 関数 $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times S^n \to \mathbb{R}$ は次を満たすとする.

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) - \mu(x)|\xi| \le F(x, \xi, X) \le \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) + \mu(x)|\xi| \quad \text{for } (x, \xi, X) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times S^n. \tag{5}$$

ここで, S^n は n 次実対称行列全体とし, $\mathcal{P}^\pm_{\lambda\Lambda}$ は Pucci 作用素と呼ばれ, 次で定義する.

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) := \max\{-\mathrm{Tr}(AX) : A \in S^n, \lambda I \le A \le \Lambda I\}, \quad \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) := -\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(-X).$$

障害問題の解の regularity は障害の滑らかさに依存するが, 最近 L. F. Duque ([3]) により $F(x, \xi, X) = F(X)$, $\mu \equiv 0$ かつ $f \equiv C$ とした最も単純な非発散型の両側障害問題 (1) の粘性解 $u \in C(\Omega)$ に対して, φ, $\psi \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ for $\alpha \in (0, 1)$ のとき, 次が示された.

$$|u(x) - u(y)| \le C'|x - y|^\alpha \quad \text{for } x, y \in \Omega' \Subset \Omega.$$

ここで, C' は n, λ, Λ, C, $\|\varphi\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$, $\|\psi\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$ と $\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ にのみ依存する.

一般の関数 $G : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \to \mathbb{R}$ を与えて, L^p-粘性解の定義を導入する.

Definition 1 ([2]) $u \in C(\Omega)$ が $G(x,u,Du,D^2u)=0$ in Ω の L^p-粘性劣解（*resp.*, L^p-粘性優解）であるとは, $\eta \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ に対して, $u-\eta$ が $x_0 \in \Omega$ で局所最大（*resp.*, 局所最小）をとるならば, 次が成り立つ.

$$\lim_{r\to 0} ess \inf_{B_r(x_0)} G(x,u(x),D\eta(x),D^2\eta(x)) \le 0 \quad \left(resp., \ \lim_{r\to 0} ess \sup_{B_r(x_0)} G(x,u(x),D\eta(x),D^2\eta(x)) \ge 0 \right).$$

さらに, $u \in C(\Omega)$ が L^p-粘性解であるとは, L^p-粘性劣解かつ優解である.

以下, $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が modulus of continuity であるとは, $\omega(0)=0$ を満たす非減少な連続関数である. 仮定 (2)-(5) の下, 次の連続性評価が得られる.

Theorem 2 ある modulus of continuity ω が存在して, (1) の L^p-粘性解 $u \in C(\overline{\Omega})$ に対して, $u=0$ on $\partial\Omega$ ならば次が成り立つ.

$$|u(x)-u(y)| \le \omega(|x-y|) \quad \text{for } x,y \in \overline{\Omega}.$$

ここで, ω は特に $\|f\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\mu\|_{L^q(\Omega)}$, φ と ψ の modulus of continuity に依存する.

次の補題を用いて上の定理を示す.

Lemma 3 (弱 Harnack 不等式: Koike-Święch [6]) ある定数 $\varepsilon_0>0$, $C>0$ が存在して, $u \in C(B_{2r})$ が $u \ge 0$ in B_{2r} を満たし, $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2u)+\mu|Du|+f=0$ in B_{2r} の L^p-粘性優解ならば, 次が成り立つ.

$$r^{-\frac{n}{\varepsilon_0}}\|u\|_{L^{\varepsilon_0}(B_r)} \le C\left(\inf_{B_r} u + r^{2-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p(B_{2r})}\right).$$

ここで, ε_0, C は n, p, q, λ, Λ と $\|\mu\|_{L^q(B_{2r})}$ にのみ依存する.

次の近似方程式を考えることで, 障害問題の解の存在が得られる.

$$F(x,Du_\varepsilon,D^2u_\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon-\psi)^+-\frac{1}{\varepsilon}(\varphi-u_\varepsilon)^+=f.$$

ここで, $a^+ := \max\{a,0\}$ for $a \in \mathbb{R}$.

Theorem 4 $u=0$ in $\partial\Omega$ を満たす (1) の L^p-粘性解 $u \in C(\overline{\Omega})$ が存在する.

参考文献

[1] L. A. Caffarelli, The obstacle problem revisited, J. Fourier Anal. Appl., **4** (4-5), (1998), 383–402.

[2] L. A. Caffarelli, M. G. Crandall, M. Kocan and A. Święch, On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients, Comm. Pure Appl. Math., **49** (4), (1996), 365–398.

[3] L. F. Duque, The double obstacle problem on non divergence form, arxiv: 1709.07072v1 [math.AP] 20 Sep 2017.

[4] L. Escauriaza, $W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully non-linear equations, Indiana Univ. Math. J., **42** (2) (1993), 413-423.

[5] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, Pure and Applied Mathematics, **88**, Academic Press, Inc., New York-London, 1980.

[6] S. Koike and A. Święch, Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients, J. Math. Soc. Japan, **61** (3), (2009), 723–755.