非線形シュレーディンガー方程式系の明示解とその漸近挙動

神戸大学海事科学研究科　清水翔之

1　序

非線形シュレーディンガー (NLS) 方程式の連立系

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \lambda_1 |v|^{p-1} u, \\ i\partial_t v + \Delta v = \lambda_2 |u|^{p-1} v \end{cases} \tag{1}$$

を考えよう. ここで, $1 < p < 1 + 2/n$ であり, λ_1, λ_2 は**任意の複素数**とする (後の章で見る様に, これらの虚部の符号が解の挙動を分類する上で一つの指標となる).

この講演では解の形を

$$(t \text{ のみの関数}) \times (\text{自由シュレーディンガー方程式の解})$$

と仮定して求める (この様な形でシュレーディンガー方程式の解を構成するというのは, 著者は Kita([K]) や Doi([D]) から学んだが, 線形の分野では Kitada-Yajima の Electric-Schrodinger に関する研究 ([KY]) からあった様である). すなわち,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= A(t) e^{it\Delta} f,, \\ v(t,x) &= B(t) e^{it\Delta} g, \end{aligned} \tag{2}$$

とし f, g は t によらない x のみの関数とする.

これらを (1) に代入し, 元の方程式を $A(t), B(t)$ に関する常微分系に帰着させて解の漸近挙動を見ようというのが目論見である. その為には x 変数を (1) に代入した時に"消える"様な上手い初期値を持ってくる必要があろう. ここで,(1) が**ゲージ不変性**と呼ばれる性質を備えている事に注意しよう; 即ち

$$u, v \text{ が (1) の解} \rightarrow |\alpha| = |\beta| = 1 \text{ なる } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ に対し } \alpha u, \beta v \text{ は (1) の解.}$$

従って解の自由シュレーディンガー方程式から来る部分が $e^{it\Delta} f = a(t) e^{i\phi(t,x)}, \phi \in \mathbb{R}$ となる様な初期値 f であれば良い. この様なものとして例えば初期値がデルタ関数と平面波の場合が考えられる. 即ち;

$$\begin{aligned} f(x) = \delta(x-a) &\rightarrow e^{it\Delta} f(x) = (\frac{1}{4\pi i t})^{n/2} e^{\frac{i|x-a|^2}{4t}}, \\ f(x) = e^{ix\cdot a} &\rightarrow e^{it\Delta} f(x) = e^{it|a|^2 + ix\cdot a}, \end{aligned}$$

ここに $a \in \mathbb{R}^N$ で $\delta(x-a)$ は台が a のデルタ関数である. u, v の初期値がこの様なものであれば, (1) は $A(t), B(t)$ の常微分系となり, しかもそれは陽に

解く事が出来る．従って解の時間減衰や blow-up rate が陽に分かるという事になる．

注意 1. 解の形を見れば分かる様に, 初期値は通常用いられるソボレフ空間のクラスには入らない. また可積分系や定在波と呼ばれるクラスの解とも赴きが異なる．にも関わらずこの様な形の解を考察するのはどの様な意味合いが考えられるだろうか? NLS は線形の多体シュレーディンガー方程式を平均場近似する事によって得られる方程式であった．この点から鑑みて著者には, これらの解は, 量子的粒子のなすクラスター内の動きを記述するものではないかと考えられるのである (同じ指摘は講義録 [FrL] にもある).

注意 2. この様に方程式のゲージ不変性を利用する事で例えば非線形光学における増幅項を伴った NLS や非線形クライン・ゴルドンに対しても明示解を作る事が出来る.

本研究は土井一幸氏（富山県立大学）との共同研究である.

2　初期値がデルタ関数の場合の結果

ここでは (1) の解を以下の形に特定して求める;

$$\begin{aligned} u(t,x) &= A(t)[e^{it\Delta}\delta(x-a)] = (\frac{1}{4\pi it})^{n/2}A(t)e^{\frac{i|x-a|^2}{4t}}, \\ v(t,x) &= B(t)[e^{it\Delta}\delta(x-b)] = (\frac{1}{4\pi it})^{n/2}B(t)e^{\frac{i|x-b|^2}{4t}}, \end{aligned} \tag{3}$$

また

$$\begin{aligned} u(0,x) &= A(0)\delta(x-a) \equiv \mu\delta(x-a), \mu \in \mathbb{C}, \\ v(0,x) &= B(0)\delta(x-a) \equiv \nu\delta(x-a), \nu \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

とする．ここで $a, b \in \mathbb{R}^n$ は x 変数の部分は結局消えるので, 以下の結果には影響しない．直接計算により例えば (1) の第一式は

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u &= i\partial_t A(t) \cdot [e^{it\Delta}\delta(x-a)], \\ \lambda_1|v|^{p-1}u &= \lambda_1(\frac{1}{4\pi t})^{n(p-1)/2}|B(t)|^{p-1}A(t) \cdot [e^{it\Delta}\delta(x-a)]. \end{aligned}$$

ここで非線形項の冪の部分がゲージ不変性により x 変数が消えている事に注意しよう．(1) の第二式も同様の計算が出来て, 以下のＯＤＥ系を得る;

$$\begin{cases} i\partial_t A(t) = \lambda_1(\frac{1}{4\pi t})^{n(p-1)/2}|B(t)|^{p-1}A(t), A(0) = \mu, \\ i\partial_t B(t) = \lambda_2(\frac{1}{4\pi t})^{n(p-1)/2}|A(t)|^{p-1}B(t), B(0) = \nu. \end{cases} \tag{4}$$

更に次の補題が成り立つ;

補題. 任意の $t \geq 0$ に対し, $\mathrm{Im}\lambda_2|A(t)|^{p-1} - \mathrm{Im}\lambda_1|B(t)|^{p-1} = \mathrm{Im}\lambda_2|\mu|^{p-1} - \mathrm{Im}\lambda_1|\nu|^{p-1} =: K$.

この保存量 K を用いる事で (4) を陽に解く事が出来, その漸近挙動を explicit に知る事が出来る.

解は初等関数で書ききる事が出来るのだが, やや煩雑な形になるので付録に回す事にして, この節では漸近挙動に的を絞って述べる. この場合 K 及び, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ の虚部の符号によって挙動が大きく異なる. 大体どの様になるかは以下の通り;

定理. (1) の解 u, v の時刻 t に関する漸近挙動は以下の様に分類される;

1 $K = 0$ の時

[1-a] ($\mathrm{Im}\lambda_1 = \mathrm{Im}\lambda_2 = 0$) u, v は共に多項式減衰 ($n/2$ のオーダー).

[1-b] ($\mathrm{Im}\lambda_1, \mathrm{Im}\lambda_2 < 0$) u, v は共に多項式減衰 ($1/p-1$ のオーダー).

[1-c] ($\mathrm{Im}\lambda_1, \mathrm{Im}\lambda_2 > 0$) u, v は共に爆発.

2 $K > 0$ の時

[2-a] ($\mathrm{Im}\lambda_1 = 0, \mathrm{Im}\lambda_2 > 0$) u は多項式減衰 ($n/2$ のオーダー),v は指数増大.

[2-b] ($\mathrm{Im}\lambda_1 < 0$) u は指数減衰,v は多項式減衰 ($n/2$ のオーダー).

[2-c] ($\mathrm{Im}\lambda_1, \mathrm{Im}\lambda_2 > 0$) u, v は共に爆発.

結合定数の虚部 $\mathrm{Im}\lambda_1, \mathrm{Im}\lambda_2$ の符号如何によって解の挙動が大きく異なる事に着目して頂きたい. より詳細な事は講演で述べる.

3 付録

ここでは (1) の方程式の係数を一般化した

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{\Delta}{2m_1}u = \lambda_1 |v|^{p-1}u, & u(0,x) = \mu\delta_a(x), \\ i\partial_t v + \frac{\Delta}{2m_2}v = \lambda_2 |u|^{p-1}v, & v(0,x) = \nu\delta_b(x) \end{cases} \tag{5}$$

に対する解の具体形を記す. ここで簡略化の為 $\delta_a(x) = \delta(x-a)$,$\delta_b(x) = \delta(x-b)$ と置いた. 解の導出方法や漸近挙動は前節で述べたものと全く同様である.

$$K := \mathrm{Im}\lambda_2 (m_1^{n(p-1)/2})|\mu|^{p-1} - \mathrm{Im}\lambda_1 (m_2^{n(p-1)/2})|\nu|^{p-1}$$

とし, $\Phi(t) := \int_0^t (2\pi s)^{-n(p-1)/2}\, ds$ とする. $1 < p < 1 + 2/n$ としているので $t \to +\infty$ で $\Phi(t) \to \infty$ となる事に注意しよう.

$u(t,x), v(t,x)$ は

$$\begin{aligned} u(t,x) &= A(t) e^{it\frac{\Delta}{2m_1}} \delta_a(x) = A(t) \big(\frac{m_1}{2\pi i t}\big)^{n/2} \exp\big(\frac{i m_1 |x-a|^2}{2t}\big), \\ v(t,x) &= B(t) e^{it\frac{\Delta}{2m_2}} \delta_b(x) = B(t) \big(\frac{m_2}{2\pi i t}\big)^{n/2} \exp\big(\frac{i m_2 |x-b|^2}{2t}\big), \end{aligned}$$

の形を仮定して解を求める. 解の具体系は以下の通り.

1. (the case that $K=0$)

   (a) ($\mathrm{Im}\lambda_1=\mathrm{Im}\lambda_2=0$)

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mu \exp\big(-i\lambda_1 |m_2^{n/2}\nu|^{p-1}\varPhi(t)\big) e^{it\frac{\Delta}{2m_1}}\delta_a(x), \\ v(t,x) &= \nu \exp\big(-i\lambda_2 |m_1^{n/2}\mu|^{p-1}\varPhi(t)\big) e^{it\frac{\Delta}{2m_2}}\delta_b(x), \end{aligned} \tag{6}$$

   (b) ($\mathrm{Im}\lambda_1\neq 0$, $\mathrm{Im}\lambda_2\neq 0$)

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mu(1-(p-1)\mathrm{Im}\lambda_2|m_1^{n/2}\mu|^{p-1}\varPhi(t))^{\frac{i\lambda 1}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda_1}} e^{it\frac{\Delta}{2m_1}}\delta_a(x), \\ v(t,x) &= \nu(1-(p-1)\mathrm{Im}\lambda_1|m_2^{n/2}\nu|^{p-1}\varPhi(t))^{\frac{i\lambda 2}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda_2}} e^{it\frac{\Delta}{2m_2}}\delta_b(x), \end{aligned} \tag{7}$$

2. (the case that $K\neq 0$)

$$u(t,x)=\begin{cases} \mu\exp\big(\frac{i\lambda_1|m_2^{n/2}\nu|^{p-1}}{K(1-p)}(e^{K(p-1)\varPhi(t)}-1)\big)e^{it\frac{\Delta}{2m_1}}\delta_a(x) \\ \qquad\qquad \text{if } \mathrm{Im}\lambda_1=0, \\ \mu\big(1-\frac{\mathrm{Im}\lambda_1|m_2^{n/2}\nu|^{p-1}}{K}(e^{K(p-1)\varPhi(t)}-1)\big)^{\frac{i\lambda 1}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda_1}}e^{it\frac{\Delta}{2m_1}}\delta_a(x) \\ \qquad\qquad \text{if } \mathrm{Im}\lambda_1\neq 0, \end{cases}$$

$$v(t,x)=\begin{cases} \nu\exp\big(\frac{i\lambda_2|m_1^{n/2}\mu|^{p-1}}{K(p-1)}(e^{K(1-p)\varPhi(t)}-1)\big)e^{it\frac{\Delta}{2m_2}}\delta_b(x) \\ \qquad\qquad \text{if } \mathrm{Im}\lambda_2=0, \\ \nu\big(1-\frac{\mathrm{Im}\lambda_2|m_1^{n/2}\mu|^{p-1}}{K}(1-e^{K(1-p)\varPhi(t)})\big)^{\frac{i\lambda 2}{(p-1)\mathrm{Im}\lambda_2}}e^{it\frac{\Delta}{2m_2}}\delta_b(x) \\ \qquad\qquad \text{if } \mathrm{Im}\lambda_2\neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

4 文献

[D] K. Doi *Fully nonlinear gauge invariant evolution of the plane wave*, Differential Integral Equations Volume 21, Number 9-10 (2008), 851-858.
[FrL] J Fröhlich, E Lenzmann, *Mean-Field Limit of Quantum Bose Gases and Nonlinear Hartree Equation*, Sminaire quations aux drives partielles (Polytechnique), (2003-2004), Talk no. 18, p. 1-26
[K] N. Kita, *Mode generating property of solutions to the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, in "Nonlinear Dispersive Equations," Ozawa, T. and Tsutsumi, Y. (Eds.), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. 26, Gakkōtosho, Tokyo, 2006, 111–128.
[KY] H. Kitada, K. Yajima, *A scattering theory for time-dependent long-range potentials*, Duke Math. J. 49 (1982), 341—376.