Center stable manifolds around line solitary waves of the Zakharov–Kuznetsov equation

山崎 陽平　(広島大学大学院理学研究科　学術振興会特別研究員PD)

1. 導入

次のZakharov–Kuznetsov 方程式

(ZK) $$u_t + \partial_x(\Delta u + u^2) = 0, \quad u(t,x,y) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L \to \mathbb{R}$$

の進行波周りの解を考察する．ここで, $\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}$. Zakharov–Kuznetsov 方程式は一様磁場化プラズマ中のイオン音波を記述する方程式として導出されているモデル方程式である [8]. Molinet–Pilod [4] により, (ZK) の初期値問題に対し, エネルギー空間 $H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L)$ での大域的適切性が示されている.

(ZK) の進行波 $Q(x-ct,y)$ が軌道安定であるとは, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, ある $\delta>0$ が存在して $\|u(0)-Q\|_{H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L)} < \delta$ となる (ZK) の解 $u(t)$ が

$$\sup_{t\geq 0} \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L} \|u(t,\cdot,\cdot) - Q(\cdot - x, \cdot - y)\|_{H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L)} < \varepsilon$$

を満たすときいう．また, 軌道安定でないとき軌道不安定であるという.

空間次元が1次元の時のZakharov–Kuznetsov 方程式に対応するKdV 方程式：

$$u_t + (u_{xx} + u^2)_x = 0, \quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

はKdV ソリトンと呼ばれる進行波：

$$Q_c(x-ct) = \frac{3c}{2}\cosh^{-2}\Big(\frac{\sqrt{c}(x-ct)}{2}\Big), \quad c>0$$

を持つ．任意の進行速度 $c>0$ について, KdV ソリトン Q_c は軌道安定かつ漸近安定になることが示されている [1, 2, 5].

本講演では, KdV ソリトン Q_c を $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ 上のZakharov–Kuznetsov 方程式の線状進行波とみなし, 線状進行波 Q_c を考察する．$\mathbb{R}^2$ 上の線状進行波 Q_c は任意の進行速度 $c>0$ に対して, Rousset–Tzvetkov [6] により軌道不安定であることが示されている．私は [7] の中で, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$ 上の線状進行波 Q_c は, $0<c\leq 4/5L^2$ のとき軌道安定かつ漸近安定となり, $4/5L^2<c$ のとき軌道不安定になることを示した．[7] より, 軌道安定な線状進行波の周りの解は適当な意味で線状進行波に漸近することがわかる．ここでは, 軌道不安定な線状進行波の周りの解挙動を考察するため, 以下の中心安定多様体を定義する.

Definition 1. C^1 級多様体 $\mathcal{M}_{cs}$ が以下を満たすとき Q_c の周りの (ZK) の中心安定多様体であるという.

(i) $\{\tau_q Q_c : q\in\mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_{cs}$

(ii) $\mathrm{codim}\mathcal{M}_{cs} = \dim\{f\in H^1 : \partial_x\mathbb{L}_c f = \lambda f, \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$

(iii) $\tau_q U(t)\mathcal{M}_{cs} \subset \mathcal{M}_{cs}$ *for* $t\geq 0$ *and* $q\in\mathbb{R}$

(iv) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ *s.t.* $U(t)(N_{\delta,c}\cap\mathcal{M}_{cs}) \subset N_{\varepsilon,c}\cap\mathcal{M}_{cs}$ *for* $t\geq 0$

(v) $\exists\delta>0$ *s.t.* $\forall u_0\in N_{\delta,c}\setminus\mathcal{M}_{cs}$, $\exists t_0>0$ *s.t.* $U(t_0)u_0 \notin N_{\delta,c}$

ここで, $(\tau_q u)(x,y) = u(x-q,y)$ かつ $\partial_x\mathbb{L}_c = \partial_x(-\Delta + c - 2Q_c)$ は Q_c での (ZK) の線形化作用素, $U(t)$ は (ZK) の発展作用素, $N_{\delta,c} = \{f\in H^1 : \inf_{q\in\mathbb{R}}\|f-\tau_q Q_c\|_{H^1} < \delta\}$.

不安定な進行波の近くに初期値をもつ解の多くは進行波から離れるが, 一般には不安定な進行波から離れない解が存在する. 中心安定多様体は進行波周りでの線形化作用素の実部が非正のスペクトルに対応する固有空間を接空間とする多様体である. 特に, Definition 1 の (iv) は中心安定多様体上の解に関しては不安定な進行波から離れないことを主張しており, (v) は中心安定多様体上にない解は線状進行波から離れることを主張している.

2. 主定理

本講演では以下の主定理について考察する.

Theorem 1. $c^* \in \{c > 4/5L^2 : c \neq 4n^2/5L^2 \ for \ n \in \mathbb{Z}\}$ に対し, Q_{c^*} の周りの (ZK) の中心安定多様体 $\mathcal{M}_{cs}(c^*)$ が存在する.

Theorem 1 と $c = 4/5L^2$ での漸近安定性の結果を組み合わせると次の系が得られる.

Corollary 1. 任意の $\beta > 0$ に対して, ある $c_\beta > 4/5L^2$ が存在して, 任意の $4/5L^2 < c < c_\beta$ に対し, ある $\varepsilon_{\beta,c} > 0$ が存在し, $u(0) \in N_{\varepsilon_{\beta,c},c} \cap \mathcal{M}_{cs}(c)$ を満たす (ZK) の解 $u(t)$ ついて, $\rho(t), \in \mathbb{R}$, $c_+ > 0$ が存在して以下を満たす.

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \tau_{-\rho(t)} u(t) - Q_{c_+} \right\|_{H^1(x>\beta t)} = 0, \ \lim_{t\to\infty} \dot{\rho}(t) = c_+,$$
$$|c_+ - c| \lesssim \|u(0) - Q_c\|_{H^1(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}.$$

ここで, $\|u\|^2_{H^1(x>\beta t)} = \int_{\{x>\beta t\}} |\nabla u|^2 + |u|^2 \, dxdy$.

Corollary 1 は進行速度 c が臨界速度 $4/5L^2$ に近いとき, 中心安定多様体 $\mathcal{M}_{cs}(c)$ 上の解が不安定な線状進行波に漸近していることを示している.

(ZK) の中心安定多様体の存在を示すために, Nakanishi–Schlag [3] による非線形 Klein–Gordon 方程式の進行波に対し, 中心安定多様体の存在を示すのに用いた議論を適用する. $c^* > 0$ と (ZK) の解 u に対し, $u(t) = \tau_{\rho(t)}(v + Q_{c(t)})$ とすると, v は

$$v_t = \partial_x \mathbb{L}_{c^*} v + (\dot{\rho} - c)\partial_x Q_{c^*} - \dot{c}\partial_c Q_{c^*} + N(v, c, \rho)$$

を満たす. ここで,

$$N(v,c,\rho) = \partial_x[-v^2 + (\dot{\rho} - c^*)v + 2(Q_{c^*} - Q_c)v + (\dot{\rho} - c)(Q_c - Q_{c^*})] - \dot{c}\partial_c(Q_c - Q_{c^*})$$

であり, 変調変数 ρ, c は線形化作用素 $\partial_x \mathbb{L}_{c^*}$ の固有値 0 に対する一般化固有空間の成分を制御するために導入した. 中心安定多様体を構成するときに, 変調変数を導入することにより現れた移流項 $(\dot{\rho} - c^*)\partial_x v$ の扱いが問題となる. そこで, 進行波と解の差の方程式が持つ移流項を扱うために, Nakanishi–Schlag は次の準距離を用いて Hadamard 法を適用した.

$$\tilde{\mathfrak{m}}_\delta(v_0, v_1) = \left(\|P_d(v_0 - v_1)\|^2_E + \inf_{q\in\mathbb{R}, j=0,1} (\|P_\gamma v_j - \tau_q P_\gamma v_{1-j}\|^2_E + |q|^2 \phi_\delta(v_{1-j})^2) \right)^{1/2}$$

ここで, $C_0 > 0$ とし, P_γ は進行波まわりでの線形化作用素の連続スペクトルへの射影, $P_d = Id - P_\gamma$, $\|\cdot\|_E$ はエネルギー空間のノルムと同値なノルム, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ は

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 & |r| < C_0 \\ r & |r| > 2C_0 \end{cases}$$

を満たし, $\phi_\delta(v) = \phi(\|P_\gamma v\|_E / \delta)$. この準距離は平行移動とその補正項 $|q|\phi_\delta(v_{1-j})$ を用いて連続スペクトル部分の差を測ることで, 移流項からくる微分の損失を回避している.

(ZK) に関して, [3] の議論を適用するにあたり次の点が問題となった. (ZK) の線状進行波 Q_c 周りの線形化作用素の共役作用素 $\mathbb{L}_c\partial_x$ が $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T}_L)$ に属さない広義固有関数 $\partial_x^{-1}\mathbb{L}_c^{-1}Q_c$ を持つため, 解と進行波の差が適切な直交条件を満たしかつ調整変数の時間微分を小さく取れない. 故に, $(\dot{\rho}-c)$ が小さくならず, [3] で用いられている準距離を用いて, 中心安定多様体を構成するために必要な評価が得られない. また, (ZK) 方程式は微分の損失を持つ非線形項 $\partial_x(v^2)$ を持つ.

本講演では, 時間の微分を含むフーリエ制限ノルム

$$\|u\|_{X^{s,b}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{L\eta\in\mathbb{Z}}\langle\tau-\xi(\xi^2+\eta^2)\rangle^{2b}\langle\sqrt{\xi^2+\eta^2}\rangle^{2s}|\tilde{u}(\tau,\xi,\eta)|^2 d\tau d\xi\Big)^{1/2}$$

と [4] の双線形評価を用いて, 微分の損失を含む非線形項 $\partial_x(v^2)$ を制御する. ここで $\tilde{u}$ は u の時空間のフーリエ変換を表す. さらに, 準距離 $\tilde{\mathfrak{m}}_\delta$ の修正することで, 中心安定多様体を構成するのに必要な評価を示す.

参考文献

[1] T. B. Benjamin, *The stability of solitary waves*, Proc. Roy. Soc. (London) Ser. A **328** (1972), 153–183.

[2] M. Martel and F. Merle, *Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **157** (2001), no. 3, 219–254.

[3] K. Nakanishi and W. Schlag, *Invariant manifolds around soliton manifolds for the nonlinear Klein-Gordon equation*, SIAM J. Math. Anal. **44** (2012), no. 2, 1175–1210.

[4] L. Molinet and D. Pilod, *Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov-Kuznetsov equation and applications*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire **32** (2015), no. 2, 347–371.

[5] R. Pego and M. I. Weinstein, *Asymptotic stability of solitary waves*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), no. 2, 305–349.

[6] F. Rousset and N. Tzvetkov, *Transverse nonlinear instability of solitary waves for some Hamiltonian PDE's*, J. Math. Pures. Appl. **90** (2008) 550–590.

[7] Y. Yamazaki, *Stability for line solitary waves of Zakharov–Kuznetsov equation*, J. Differential Equations, **262** (2017), 4336–4389.

[8] V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, *On three dimensional solitons*, Sov. Phys.-JETP, **39** (1974), 285–286.