Geometry of stationary isothermic surfaces and surfaces with the constant flow property

坂口 茂 (東北大学・情報科学研究科・RCPAM)

[S2, S3, CMS] において, 不変等温面（または不変等熱流面）による同心球面の特徴付けを与えた。ここでは, それに対応する平行超平面の特徴付けが得られたことを報告する。点 $x \in \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ に対して

$$x = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) = (y, x_N) \ \ \text{for } y \in \mathbb{R}^{N-1}$$

とおく。次を満たす２つの関数 $f, h \in C^2(\mathbb{R}^{N-1})$ を考える。

$$f(y) < h(y) \ \ \text{for every } y \in \mathbb{R}^{N-1}$$

$\mathbb{R}^N$ の２つの領域 D, Ω を次で定める。

$$D = \{x \in \mathbb{R}^N; x_N > h(y)\}, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; x_N > f(y)\}$$

熱伝導係数 $\sigma = \sigma(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ を次で定める。

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_c & \text{in } D, \\ \sigma_s & \text{in } \Omega \setminus D, \\ \sigma_m & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

ここで, $\sigma_c, \sigma_s, \sigma_m$ は正定数である。 集合 $\Omega^c = \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ の特性関数を $\mathcal{X}_{\Omega^c}$ と書く。関数 $u = u(x,t)$ に対して, 熱方程式に対する初期値問題：

$$u_t = \operatorname{div}(\sigma \nabla u) \quad \text{in } \ \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \ \text{ and } \ u = \mathcal{X}_{\Omega^c} \ \text{ on } \mathbb{R}^N \times \{0\} \tag{1}$$

および次の初期境界値問題 (2)-(4) を考える。

$$u_t = \operatorname{div}(\sigma \nabla u) \quad \text{in } \ \Omega \times (0, +\infty), \tag{2}$$

$$u = 1 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0, +\infty), \tag{3}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Omega \times \{0\} \tag{4}$$

定理 1 $N \leq 8$ または ∇f が有界であるとする。領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ は一様に C^6 級であり, 関数 $h - f$ が $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で最小値をとり, さらに, $h - f$ が $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で最大値をとるか $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で非有界であるかのどちらかが成り立つと仮定する。初期

値問題 (1) の有界な一意解 u に対して, もし, ある関数 $a:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ が存在して

$$u(x,t)=a(t) \quad \textit{for every } (x,t)\in\partial\Omega\times(0,+\infty) \tag{5}$$

を満たすならば, $\partial\Omega$ と ∂D は互いに平行な超平面でなければならない。

さらに, 次を満たす関数 $g\in C^0(\mathbb{R}^{N-1})$

$$f(y)<g(y)<h(y) \quad \text{for every } y\in\mathbb{R}^{N-1}$$

に対して, 領域 $G\subset\mathbb{R}^N$ を $G=\{x\in\mathbb{R}^N; x_N>g(y)\}$ で定め, 次を仮定する。

$$\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\le \ \operatorname{dist}(x,\overline{D}) \quad \text{for every } x\in\partial G \tag{6}$$

定理 2 $N\le 3$ または $\{|f(x)-f(z)|:|x-z|\le 1\}$ は有界であるとする。関数 $h-f$ が $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で最小値をとり, さらに, 関数 $h-f$ が $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で最大値をとるか $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で非有界であるかのどちらかが成り立つと仮定する。初期値問題 (1) または 初期境界値問題 (2)-(4) の有界な一意解 u に対して, もし, ある関数 $a:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ が存在して

$$u(x,t)=a(t) \quad \textit{for every } (x,t)\in\partial G\times(0,+\infty) \tag{7}$$

を満たすならば, $\partial\Omega$ と ∂D は互いに平行な超平面でなければならない。

定理 1 と定理 2 のどちらの証明も 2 段階からなる。第 1 段階で $\partial\Omega$ が超平面になることを示し, 第 2 段階で ∂D が $\partial\Omega$ に平行な超平面であることを示す。第 1 段階で定理 1 には [CMS] の結果と Bernstein および Moser の定理を用い, 定理 2 には [S1, OS] の結果を用いる。第 2 段階では [S3] で与えた道具に対応する新しい補題を用いる。

次に不変等熱流面についても適当な仮定の下に [CMS] と同様な定理が得られるので, それを紹介しよう。まず, 定理 1 に関連して次が成り立つ。

定理 3 $N\le 8$ または ∇f が有界であるとする。領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ は一様に C^6 級であり, 関数 $h-f$ が $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で最小値をとり, さらに, $h-f$ が $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で最大値をとるか $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で非有界であるかのどちらかが成り立つと仮定する。初期境界値問題 (2)-(4) の有界な一意解 u に対して, もし, ある関数 $b:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ が存在して

$$\sigma_s\frac{\partial u}{\partial\nu}(x,t)=b(t) \quad \textit{for every } (x,t)\in\partial\Omega\times(0,+\infty) \tag{8}$$

を満たすならば, $\partial\Omega$ と ∂D は互いに平行な超平面でなければならない。

定理 2 に関連して次が成り立つ。

定理 4 $N \leq 3$ または $\{|f(x) - f(z)| : |x - z| \leq 1\}$ は有界であるとする。関数 $h - f$ が $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で最小値をとり，さらに，関数 $h - f$ が $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で最大値をとるか $\mathbb{R}^{N-1}$ 上で非有界であるかのどちらかが成り立つと仮定する。また，$g \in C^1(\mathbb{R}^{N-1})$ を仮定する。初期値問題 (1) または 初期境界値問題 (2)-(4) の有界な一意解 u に対して，もし，ある関数 $b : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ が存在して

$$\sigma_s \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = b(t) \quad \textit{for every } (x, t) \in \partial G \times (0, +\infty) \tag{9}$$

を満たすならば，$\partial\Omega$ と ∂D は互いに平行な超平面でなければならない。

定理 3 と定理 4 において，$\frac{\partial u}{\partial \nu}$ はそれぞれ $\partial\Omega$, ∂G の外向き単位法線ベクトル ν に関する方向微分を表す。定理 3 における条件 (8) は境界条件 (3) と合わせて $\partial\Omega$ 上の過度境界条件を意味していて，このような条件は文献 [AG] において，楕円型方程式を扱う Serrin [Se] の放物型方程式への一般化として与えられた。最近ではリーマン多様体の設定で文献 [Sav] で述べられ，不変等流面（surfaces with the constant flow property）と呼ばれている。定理 4 における条件 (9) は少し異なり，法線方向微分が一定である条件を独立させ，それだけを領域の内部に設定したもので異種の過度条件であって文献 [CMS] で導入されたものである。

References

[AG] G. Alessandrini and N. Garofalo, Symmetry for degenerate parabolic equations, Arch. Rat. Mech. Anal., 108 (1989), 161–174.

[CMS] L. Cavallina, R. Magnanini and S. Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a surface of the constant flow property, arXiv:1801.01352v1, preprint.

[OS] M. Ohnuma and S. Sakaguchi, A simple proof of a strong comparison principle for semicontinuous viscosity solutions of the prescribed mean curvature equation, arXiv:1806.03587v1, Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, to appear.

[Sav] A. Savo, Heat flow, heat content and the isoparametric property, Math. Ann., 366 (2016), 1089–1136.

[S1] S. Sakaguchi, Stationary level surfaces and Liouville-type theorems characterizing hyperplanes, in “ Geometric Properties of Parabolic and Elliptic PDE's ”, Springer INdAM Series, Vol. 2, 2013, 269–282.

[S2] S. Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a stationary isothermic surface, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste, 48 (2016), 167–187.

[S3] S. Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a stationary isothermic surface and their related elliptic overdetermined problems, arXiv:1705.10628v2, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, to appear.

[Se] J. Serrin, A symmetry problem in potential theory, Arch. Rat. Mech. Anal., 43 (1971), 304–318.