非線形波動方程式の外部問題について

中村　誠　（東北大）

本講演は、J. Metcalfe と C. D. Sogge との研究 [4, 5] に基づく。空間三次元での異なる伝播速度を持つ準線形波動方程式系の外部問題における時間大域可解性を考える。非線形項は二次と三次の項からなるものを考える。二次の項には時間大域可解性を示すため、零条件を仮定する。外部問題での障害物は、その近傍での波動のエネルギーが時間に関して指数関数的に減衰していれば扱える。星型形状領域や非捕捉的な障害物、十分離れた複数のボールも障害物として扱える。時間大域解の存在は、時間局所解の存在定理を使い、連続性の議論を用いて示される。Sideris-Tu [6] によるエネルギーの分離評価法、つまり、解の低いエネルギーと高いエネルギーをそれぞれ評価し、高いエネルギーは時間的に増大しつつも、低いエネルギーは一定値以下であることを示し、時間大域可解性を示す。

障害物は境界が滑らかでコンパクトな物を考え、$\mathcal{K}(\subset \mathbb{R}^3)$ で表される。簡単のため $0 \in \mathcal{K}\backslash\partial\mathcal{K} \subset \{|x|<1\}$ とする。次の条件を仮定する：もし u が $\Box u = 0$ の解であり、初期関数 $u(0,x)$, $\partial_t u(0,x)$ が $\{|x| \le 4\}$ にその台を持つとする。この時ある定数 $c, C > 0$ が存在し

$$\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{K}\,:\,|x|<4\}} |u'(t,x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le Ce^{-ct} \sum_{|\alpha|\le 1} \|\partial_x^\alpha u'(0,\cdot)\|_2 \tag{0.1}$$

が成立する。

ディリクレ条件を満たす次の方程式系を考える：$D \ge 1$, $u = (u^1, \cdots, u^D)$,

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c_I^2\Delta)u^I = F^I(u, \partial u, \partial^2 u),\ 1 \le I \le D,\ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3\backslash\mathcal{K} \\ u(t,\cdot)|_{\partial\mathcal{K}} = 0 \\ u(0,\cdot) = f, \quad \partial_t u(0,\cdot) = g. \end{cases} \tag{0.2}$$

簡単のため、$0 < c_1 < \cdots < c_D$ とする。非線形項 $F^I(u, \partial u, \partial^2 u)$ は次式で与えられる：

$$F^I(u,\partial u,\partial^2 u) = B^I(\partial u) + Q^I(\partial u, \partial^2 u) + R^I(u, \partial u, \partial^2 u) + P^I(u, \partial u) \tag{0.3}$$

ここで、B^I と Q^I は二次の項であり、R^I と P^I は三次の項である；

$$B^I(\partial u) = \sum_{\substack{1\le J,K\le D\\ 0\le j,k\le 3}} A_{jk}^{IJK} \partial_j u^J \partial_k u^K, \qquad Q^I(\partial u, \partial^2 u) = \sum_{\substack{1\le J,K\le D\\ 0\le j,k,\ell\le 3}} B_{jk\ell}^{IJK} \partial_j u^J \partial_k \partial_\ell u^K,$$

$$R^I(u, du, d^2u) = \sum_{\substack{1\le J\le D\\ 0\le j,k\le 3}} C_{jk}^{IJ}(u, \partial u)\partial_j\partial_k u^J,$$

また、 $C^{IJ}_{jk}(u,\partial u)=O(|u|^2+|\partial u|^2)$, $P(u,\partial u)=O(|u|^3+|\partial u|^3)$ とする。
　エネルギー法を用いる上で準線形項には対称条件

$$B^{IJK}_{jk\ell}=B^{JIK}_{jk\ell}=B^{IJK}_{j\ell k},\qquad C^{IJ}_{jk}=C^{JI}_{jk}=C^{IJ}_{kj}$$

が仮定される。時間大域可解性を示すために二次の項には次の零条件を仮定する：

$$\sum_{0\le j,k\le 3}A^{III}_{jk}\xi_j\xi_k=0,\qquad \sum_{0\le j,k,l\le 3}B^{III}_{jkl}\xi_j\xi_k\xi_l=0 \tag{0.4}$$

ここで、$\xi_0^2=c_I^2(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)$, $1\le I\le D$.

Theorem 1 (主定理) 初期関数 $(f,g)\in C^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{K})$ が適合条件 $(\partial_t^j u(0,\cdot)|_{\partial\mathcal{K}}=0$, $\forall j\ge 0)$ を満足するものとする。この時、ある定数 $\varepsilon>0$ と自然数 $N>0$ が存在し、(f,g) が

$$\sum_{|\alpha|\le N}\|\langle x\rangle^{|\alpha|}\partial_x^\alpha f\|_2+\sum_{|\alpha|\le N-1}\|\langle x\rangle^{1+|\alpha|}\partial_x^\alpha g\|_2\le\varepsilon \tag{0.5}$$

を満たすならば、(0.2) は一意的な解 $u\in C^\infty([0,\infty)\times(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{K}))$ を持つ。

　Klainerman によるベクトルフィールドの方法を用いる上で次の記号を使用する：

$$\partial_0=\partial_t,\quad \Omega_{ij}=x_i\partial_j-x_j\partial_i\quad(1\le i\ne j\le 3),\quad L=t\partial_t+\sum_{1\le j\le 3}x_j\partial_j.$$

ここで、L をスケーリングオペレーターと呼ぶ。講演中、$\{\partial_j\}_{0\le j\le 3}$ は ∂ で、$\{\Omega_{ij}\}_{1\le i\ne j\le 3}$ は Ω で、$\{\partial,\Omega\}$ は Z で表記することにする。

Lemma 2 (Klainerman-Sobolev estimates)

$$(1+|x|)|h(x)|\le C_0\sum_{|\alpha|\le 2}\|Z^\alpha h(y)\|_{L^2_y(0\vee(|x|-1)<|y|<|x|+1)}\qquad for\ \ \forall h\in C^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{0.6}$$

証明の概略 (非線形項が 2 次の半線形、かつ、零条件を考えなくて良い場合)：次の命題では、各点評価についてのある仮定から出発し、エネルギー法を用いて高いエネルギーを評価し、次にソボレフタイプの不等式を用いて低いエネルギーの一様有界性を示す。これにより、各点評価についての最初の仮定を再評価し、初期値が十分小さければ時間局所解は爆発しないことを示す。

Proposition 3 *Let* $\Box_c \equiv \partial_t^2 - c^2\Delta$.

$$\begin{cases} u = (u_1, u_2) \\ \Box_c u_I = \displaystyle\sum_{\substack{1\le J,K\le 2 \\ (J,K)\neq(I,I)}} A^{IJK} u'_J u'_K, \quad I = 1,2, \quad 0 < c_1 < c_2 \\ u(t,\,\cdot\,)|_{\partial\mathcal{K}} = 0 \\ u(0,\,\cdot\,) = f, \quad \partial_t u(0,\,\cdot\,) = g. \end{cases} \tag{0.7}$$

Let M_0 $(\gg 1)$ *: large number. Assume*

$$\sum_{|\alpha|\le 2M_0+20} \|\langle x\rangle^{|\alpha|}\partial_x^\alpha f\|_2 + \sum_{|\alpha|\le 2M_0+19} \|\langle x\rangle^{|\alpha|+1}\partial_x^\alpha g\|_2 \ (\equiv \varepsilon) \ \ll 1,$$

$$(1+t+|x|)\sum_{|\alpha|\le M_0} |Z^\alpha u'| \le A_0\varepsilon \quad \text{for a constant } \ A_0 > 0. \tag{0.8}$$

Then for $\forall\mu_0 \ge 0$, $\forall\sigma > 0$, $\exists C(>0)$ *s.t.*

$$\sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le 2M_0-23-20\mu_0 \\ \mu\le\mu_0}} \|L^\mu Z^\alpha u'(t)\|_2 + \sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le 2M_0-25-20\mu_0 \\ \mu\le\mu_0}} \|\langle x\rangle^{-1/2} L^\mu Z^\alpha u'\|_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{K})} \le C\varepsilon(1+t)^{C(\varepsilon+\sigma)}. \tag{0.9}$$

Moreover $\exists C_0 = C_0(\backslash A_0) > 0$ *s.t.*
(1) (High pointwise estimates)

$$\begin{aligned}(1+t+|x|)\sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le M_0+10 \\ \mu\le 1}} |L^\mu Z^\alpha u| &\le C_0\varepsilon + C\sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le M_0+17 \\ \mu\le 2}} \|\langle x\rangle^{-1/2} L^\mu Z^\alpha u'(t)\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{K})} \\ &\le C_0\varepsilon + C\varepsilon^2(1+t)^{C(\varepsilon+\sigma)} \\ &\qquad \text{if } \ M_0 + 17 \le 2M_0 - 20 - 20\times 2 \ \ (i.e.\ M_0 \ge 77).\end{aligned}$$

(2) (High Sobolev type estimates)

$$\langle x\rangle^{1/2}\langle c_I t - |x|\rangle \sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le M_0+8 \\ \mu\le 1}} |L^\mu Z^\alpha u'_I(t)| \le C\varepsilon(1+t)^{C(\varepsilon+\sigma)} \ \ \text{for } \ I = 1,2.$$

(3) (Low energy estimates)

$$\sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le M_0+8 \\ \mu\le 1}} \|L^\mu Z^\alpha u'(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{K})} \le C_0\varepsilon + C\varepsilon^{3/2}.$$

(4) (Low Sobolev type estimates)

$$\langle x\rangle^{1/2}\langle c_I t-|x|\rangle \sum_{|\alpha|\le M_0+5} |Z^\alpha u_I'(t)| \le C\varepsilon \quad \textit{for} \quad I=1,2.$$

(5) (Low pointwise estimates)

$$(1+t+|x|)\sum_{|\alpha|\le M_0} |Z^\alpha u'| \le C_0\varepsilon + C\varepsilon^{3/2}.$$

Remark (時間大域解). Take $A_0 \equiv 4C_0$ and $\varepsilon \to 0$. Then

$$(1+t+|x|)\sum_{|\alpha|\le M_0} |Z^\alpha u'| \le (A_0/2)\varepsilon.$$

次の補題は、命題中の (1) を証明する際に使用する。

Lemma 4 (Keel-Smith-Sogge タイプの各点評価式) ： *Let*

$$\begin{cases} \Box_c v = G \\ v|_{\partial\mathcal{K}} = 0 \\ v(0)=v_0,\ \partial_t v(0) = v_1 \end{cases}$$

Then

$$(1+t+|x|)\sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le M\\ \mu\le\mu_0}} |L^\mu Z^\alpha v(t,x)| \le C \sum_{\substack{j+\mu+|\alpha|\le M+8\\ \mu\le\mu_0+2,\ j\le 1}} \|(\langle x\rangle^j \partial_{t,x}^j L^\mu Z^\alpha v)(0,x)\|_{L^2_x}$$
$$+ C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{K}} \sum_{\substack{|\alpha|+\mu\le M+7\\ \mu\le\mu_0+1}} |L^\mu Z^\alpha \Box_c v(s,y)| \,\frac{dy\,ds}{|y|}$$

次の補題は、命題中の (2)、 (4) を証明する際に使用する。

Lemma 5 (肥田野-横山タイプのソボレフ評価式：) *Let* $\langle r\rangle = \sqrt{1+r^2}$,

$$\begin{cases} \Box_c v = G \\ v|_{\partial\mathcal{K}} = 0 \\ v(0)=v_0,\ \partial_t v(0) = v_1 \end{cases}$$

Then

$$\langle x\rangle^{1/2}\langle ct-|x|\rangle \sum_{\substack{|\alpha|+\mu\le M\\ \mu\le\mu_0}} |L^\mu Z^\alpha v'(t,x)| \le C \sum_{\substack{|\alpha|+\mu\le M+2\\ \mu\le\mu_0+1}} \|L^\mu Z^\alpha v'\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{K})}$$
$$+ C \sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le M+1\\ \mu\le\mu_0}} \|(1+t+|x|)L^\mu Z^\alpha \Box_c v\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{K})} + C(1+t)\sum_{\mu\le\mu_0} \|L^\mu v'\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{K},|x|\le 2)}$$

次の二つの補題は、命題中の (5) を証明する際に使用する。

Lemma 6 ($\Box u$ の台が光円錐の近傍にある時の各点評価式 :) *Let U be a solution to*

$$\begin{cases} \Box_c U(t,x) = F(t,x) \\ U(t,x)|_{x\in\partial\mathcal{K}} = 0 \\ U(t,\cdot) = 0 \quad for \quad t \le 0. \end{cases}$$

Assume

$$supp\ F \subset \{(t,x); t \ge 1 \vee \frac{6}{c}, \quad \frac{ct}{10} \le |x| \le 10ct\}.$$

Then for any $M \ge 0$ and $\mu_0 \ge 0$

$$\sup_{|x|\le ct/2} (1+t) \sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le M \\ \mu\le\mu_0}} |L^\mu Z^\alpha U(t,x)| \le C \sup_{0\le s\le t} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{K}} \sum_{\substack{|\alpha|+\mu\le M+7 \\ \mu\le\mu_0+1}} |L^\mu Z^\alpha F(s,y)| dy$$
$$+ C \sup_{0\le s\le t} (1+s) \sum_{\substack{|\alpha|+\mu\le M+3 \\ \mu\le\mu_0}} \|L^\mu \partial^\alpha F(s,y)\|_{L^2(|y|<4)}.$$

Lemma 7 ($\Box u$ の台が光円錐から離れている時の各点評価式 :) *Let*

$$\begin{cases} \Box_c U(t,x) = F(t,x) \\ U(t,x)|_{x\in\partial\mathcal{K}} = 0 \\ U(0,x) = f(x), \quad \partial_t U(0,x) = g(x). \end{cases}$$

Assume

$$supp\ F \subset \{(t,x); 0 \le t \le 2,\ |x| \le 2\} \cup \{(t,x); |x| \le \frac{ct}{5} \quad or \quad |x| \ge 5ct\ \}.$$

Then for $\forall\theta > 0$, $\exists C$ such that

$$\sup_{|x|\le ct/2} (1+t) \sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le M \\ \mu\le\mu_0}} |L^\mu Z^\alpha U(t,x)| \le C \sum_{\substack{\mu+|\alpha|\le M+7 \\ \mu\le\mu_0+1,\ j\le 1}} \|(\langle x\rangle^j \partial_{t,x}^j (r\partial_r)^\mu Z^\alpha U)(0,x)\|_{L^2_x}$$
$$+ C \sup_{\substack{s\ge 0 \\ y\in\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{K}}} \langle y\rangle^{2-\theta} (1+s+|y|)^{1+\theta} \sum_{\substack{|\alpha|+\mu\le M+4 \\ \mu\le\mu_0}} |L^\mu Z^\alpha F(s,y)|.$$

参考文献

[1] M. Keel, H. Smith, and C. D. Sogge: *Almost global existence for quasilinear wave equations in three space dimensions*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 109–153.

[2] K. Kubota and K. Yokoyama: *Global existence of classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation*, Japan. J. Math. (N.S.) **27** (2001), 113–202.

[3] J. Metcalfe and C. D. Sogge: *Hyperbolic trapped rays and global existence of quasilinear wave equations*, Invent. Math. **159** (2005), 75–117.

[4] J. Metcalfe, M. Nakamura, and C. D. Sogge: *Global existence of solutions to multiple speed systems of quasilinear wave equations in exterior domains*, Forum Math. **17** (2005), 133–168.

[5] J. Metcalfe, M. Nakamura, and C. D. Sogge: *Global existence of quasilinear, nonrelativistic wave equations satisfying the null condition*, to appear in Japanese Journal of Mathematics.

[6] T. Sideris and S.Y. Tu: *Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with multiple speeds*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 477–488.