熊本大学応用解析セミナー
平成 18 年 7 月 1 日

移動境界の特異極限法による解析

広島大学大学院理学研究科数理分子生命理学専攻
中木 達幸 (Nakaki, Tatsuyuki)

本研究の結果は、村川秀樹氏（富山大学）との共同研究に基づくものである。

本講演では、2 つの移動境界問題を特異極限を使って近似することを考察する。この研究の動機は数値計算にある（が、数値計算を離れても興味深い問題だと思われる）。移動境界問題を解析するための手法の 1 つとして、昔から数値的なものが使われている。空間 1 次元問題については、移動境界を track する方法があり、多くの成果がある。しかし、空間多次元の場合には、track することに数値的な困難性が生じる。それを解決するための方法の 1 つとして、level set 法などの移動境界を capture する方法が提唱され、平均曲率流問題などに対して成果があがっている。

別の方法として、特異極限を使ったものがある。これは、元の問題をある反応拡散系の極限として捉えるものであり、最初、井古田亮氏、三村昌泰氏と中木が激しい競争をしている生物問題の解析のために提唱したものである (Threshold Competition Dynamics、略して TCD と名付けた)。最大の特徴として、数値計算に適用した場合、移動境界を自然に捉えることができ、アルゴリズムが単純で、コンピュータでの計算コストが低いことである。

特異極限法を使う場合、解析したい移動境界問題を近似する反応拡散系を見つけ、TCD を適用した場合の数学的な裏付けをとる必要がある。本講演では、結果が得られた問題として古典的な Stefan 問題を、研究中の問題（数値的には良好であるが、数学的な結果がまだないもの）として porous medium の問題を扱うことにする。

ここで扱う Stefan 問題は、次のものである。

$$z_t = \Delta d(\phi(z)), \quad \text{in } Q_T = \Omega \times (0,T] \tag{1}$$

を初期条件

$$z(x,0) = z_0(x), \quad \text{in } x \in \Omega \tag{2}$$

と Dirichlet 境界条件

$$z(x,t) = b(x,t), \quad \text{on } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \tag{3}$$

または Neumann 境界条件

$$\frac{\partial}{\partial n} d(\phi(z)) = 0, \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T] \tag{4}$$

の下で解く。Ω は滑らかな境界をもつ R^N $(N \geq 1)$ の有界領域、

$$d(r) = \begin{cases} d_1 r & \text{if } r \geq 0 \\ d_2 r & \text{if } r < 0 \end{cases} \qquad \phi(r) = \begin{cases} r - \lambda & \text{if } r > \lambda \\ 0 & \text{if } 0 \leq r \leq \lambda \\ r & \text{if } r < 0 \end{cases} \tag{5}$$

である（$d_1, d_2, \lambda > 0$ は定数）。z はエンタルピーを、$\phi(z)$ は物質の温度を表す。$\phi(z) > 0$ となる領域は液体のところ、$\phi(z) < 0$ は固体のところで、その境目に移動境界が発生する。

得られた数学的な結果を述べる。Dirichlet 境界条件 (3) を課す場合は

$$\begin{array}{l} 0 \le b \in W_2^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T}) \\ \phi^+(z_0(x)) = b(x,0) \quad \text{for } x \in \Omega \end{array} \tag{6}$$

を仮定する。初期関数 z_0 は

$$z_0 \in L^\infty(\Omega) \tag{7}$$

を満たすものとする。

定理（井古田、村川、中木）　z_h を特異極限法の解とすると、$h \to 0$ のとき、$L^2(Q_T)$ の強位相と $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ の弱位相で

$$\phi_1(z_h) \to \phi_1(z), \quad \phi_2(z_h) \to \phi_2(z), \quad \phi(z_h) \to \phi(z) \tag{8}$$

が、$L^2(Q_T)$ の弱位相で

$$\phi_3(z_h) \to \phi_3(z), \quad z_h \to z \tag{9}$$

が成立する。ここで、h は特異極限法のパラメータ、z は元の問題の弱解、

$$\phi_1(r) = \phi^+(r) \equiv \max\{\phi(r), 0\}, \quad \phi_2(r) = \phi^-(r) \equiv \min\{\phi(r), 0\}, \quad \phi_3(r) = r - \phi(r) \tag{10}$$

である。

証明には、Riesz–Frechet–Kolmogoroff のコンパクト性に関する定理を使う。

特異極限法による Stefan 問題のシミュレーションをお見せし、有効な数値計算ができることを示す予定である。

Porous medium の問題とは、

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m, & \text{in } R^N \times (0,T] \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{in } x \in R^N \end{cases} \tag{11}$$

を満足する u を求める問題である。$m > 1$ は定数で、初期関数 u_0 は非負、連続、台がコンパクトとする。この問題は、多孔質媒体中を流れる流体をモデル化したものであり、u は流体の（ある意味で平均化した）密度を示す。定数 m の条件と u_0 の台がコンパクトであることから、任意の時刻 $t \ge 0$ でも $u(\cdot,t)$ の台もコンパクトであり（解の有限伝搬性）、$u = 0$ と $u > 0$ の境目に移動境界が表れる。この移動境界は流体が達した場所を示し、その挙動の解析は興味の 1 つである。

現在のところ、porous medium の問題に対しても特異極限法による数値実験は可能で、数値的には良好な結果を得ている。数学的な裏付けは今後の課題で、Stefan 問題と対比した現段階のお話をする予定である。