ON A LIOUVILE TYPE THEOREM FOR HARMONIC MAPS TO CONVEX SPACES VIA MARKOV CHAINS

桑江一洋 (熊本大学教育学部)

1. 枠組

この話はボン大学 Karl-Theodor Sturm 氏との共同研究に基づく。(Y,d) は完備可分な測地空間とする。講演の目的は (リーマン多様体とは限らない)(Y,d) に値をもつマルコフ連鎖に立脚した調和写像の Liouville 型定理を与えることである。リーマン多様体に値をもつ調和写像の (リーマン多様体上のブラウン運動や拡散過程に立脚した) Liouville 型定理は Kendall [3] や厚地 [1] によって既になされているが、我々の枠組みでの拡散過程をもちいた一般化は現在進行中であり、時間があればそのことにも触れたい。

定義 1.1 (Admissible function)**.** $Y\times Y$ 上の非負実数値関数 Φ が *admissible* とは、Φ は対角線上のみで退化し, $x,y\in Y$ 毎に $x\mapsto\Phi(x,y)$, $y\mapsto\Phi(x,y)$ が連続で、上半連続関数 $\psi:[0,\infty[\to[0,\infty[$ で $\psi>0$ on $]0,\infty[$, $\psi(0)=0$ and $\Phi(x,y)\le\psi(d(x,y))$ for $x,y\in Y$ を満たすものがとれることとする。また三つ組 (Y,d,Φ) が *admissible space* とは Φ が admissible であることとする。

$\mathcal{P}(Y)$ を Y 上のボレル確率測度の全体とする。admissible function Φ に対し

$$\mathcal{P}^{\Phi}(Y):=\left\{\mu\in\mathcal{P}(Y)\;\middle|\;\int_Y\Phi(w,z)\mu(dw)<\infty\text{ for all }z\in Y\right\}.$$

と定める。

定義 1.2 (Φ-barycenter)**.** (Y,d,Φ) を admissible space とする。$\mu\in\mathcal{P}^{\Phi}(Y)$ に対し、点 $b(\mu)\in Y$ が μ の *Φ-barycenter* とは各点 $z\in Y$ に対し

$$\Phi(b(\mu),z)\le\int_Y\Phi(w,z)\mu(dw)(<\infty)\tag{1.1}$$

のこととする。

注意 1.1. $\mu\in\mathcal{P}^{\Phi}(Y)$ の Φ-barycenter は一般には一意的とは限らない。μ の Φ-barycenter の集まりを $B^{\Phi}(\mu)$ と記す。

Φ-barycenter をもつ admissible space (Y,d,Φ) の例として CAT(0)-空間 (例として Hadamard 多様体, Tree, Hilbert 空間)、太田 [5] による k-凸空間 ($0<k\le 2$, 例として直径が $\pi/2$ より小さい CAT(1)-空間)、Hildebrandt や Kendall [4] によるリーマン多様体における regular geodesic ball、可分バナッハ空間などが挙げられる (個々の例の説明と Φ の与え方は講演中に詳しく述べる)。

可測空間 $(X,\mathcal{X})$ 上の保存的な Markov 連鎖 $\mathbf{M}=(\Omega,X_n,\theta_n,\mathcal{F}_n,\mathcal{F}_\infty,\mathbb{P}_x)_{x\in X}$ を考える。ここで θ_n は $X_{m+n}(\omega)=X_m(\theta_n\omega)$ で決まるシフト作用素、$\mathcal{F}_n:=\sigma\{X_k\mid$

$k \leq n\}$, $\mathcal{F}_\infty := \sigma\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ である。$P(x, dy) := \mathbb{P}_x(X_1 \in dy)$ は $(X, \mathcal{X})$ 上の推移核であり、$Pf(x) := \int_X f(y)P(x, dy)$ を積分が意味をもつ f に対し定める。

定義 1.3 (P-調和写像)**.** (Y, d, Φ) を admissible space とし、 $\mathcal{X}/\mathcal{B}(Y)$-可測写像 $u : X \to Y$ で $u_* P(x, \cdot) \in \mathcal{P}^\Phi(Y)$ を満たすものを考え、

$$Pu(x) := b(u_* P(x, \cdot)) \tag{1.2}$$

とする。ここでは Φ-barycenter $b(u_* P(x, \cdot))$ を $B^\Phi(u_* P(x, \cdot))$ から一つ選ぶものとする。$\mathcal{X}$-可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が P-**劣調和** とは $f \leq Pf$ on X のこととし、$\mathcal{X}/\mathcal{B}(Y)$-可測写像 $u : X \to Y$ が P-**調和** とは $u = Pu$ on X のこととする。

注意 1.2. $\mathcal{X}/\mathcal{B}(Y)$-可測写像 $u : X \to Y$ に対し、Pu の定義は (Y, d, Φ) の与え方および Φ-barycenter の選択に依存する。また Pu の $\mathcal{X}/\mathcal{B}(Y)$-可測性を要請する必要はない。

2. Liouville 性

定理 2.1 (Liouville 性)**.** (Y, d, Φ) を *admissible space* とする。Y が *proper,* すなわち任意の有界閉集合がコンパクト, であるか, あるいは Φ を距離関数とした $CAT(0)$-空間か可分バナッハ空間になるとする。このとき X 上の有界 P-調和関数が常に定数なら有界な P-調和写像 $u : X \to Y$ も常に定値写像である。

注意 2.1. この定理は Kendall [3] の結果の離散時間版といえる。[3] では target 空間がリーマン多様体の regular geodesic ball (特に Hadamard 多様体) であったが、ここでは多様体の部分集合とは限らないものや無限次元空間 (たとえば Hadamard 多様体に値をとる L^2-写像の全体) も例として包含されていることに注意されたい。

References

[1] Atsuji, A., Parabolicity, the divergence theorem for δ-subharmonic functions and applications to the Liouville theorems for harmonic maps, *Tohoku Math. J.* (2) **57** (2005), no. 3, 353–373.

[2] Herer, W., Espérance mathématique au sens de Doss d'une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique. (French) [Mathematical expectation in the sense of Doss of a random variable with values in a metric space] *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **302** (1986), no. 3, 131–134.

[3] Kendall, W. S., Martingales on manifolds and harmonic maps, Geometry of random motion (Ithaca, N.Y., 1987), 121–157, *Contemp. Math.*, **73**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[4] Kendall, W. S., Probability, convexity, and harmonic maps with small image I: Uniqueness and fine existence, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **61** (1990), no. 2, 371–406.

[5] Ohta, S., Convexties of metric spaces, preprint, 2005, http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta/.

[6] Sturm, K.-Th., Nonlinear Markov operators, discrete heat flow, and harmonic maps between singular spaces, *Potential Anal.* **16** (2002), no. 4, 305–340.

[7] Sturm, K.-Th., Probability measures on metric spaces of nonpositive curvature. Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces (Paris, 2002), 357–390, *Contemp. Math.*, **338**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.