非線形 Schrödinger 方程式に対する波動作用素と逆波動作用素について

川原　雄一朗（大阪大学大学院理学研究科）

本講演では, 次の非線形 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda u^2 + \mu \overline{u}^2, \qquad (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3, \tag{1}$$

の散乱問題について考える．ここで $u = u(t,x)$ は複素数値関数とし, λ, $\mu \in \mathbf{C}$ とする．重み付き Sobolev 空間を

$$\mathbf{H}_p^{m,k} = \left\{ \phi \in \mathcal{S}' : \|\phi\|_{\mathbf{H}_p^{m,k}} = \left\| (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} \phi \right\|_{\mathbf{L}^p} < \infty \right\}$$

で定義し簡単のために, $\mathbf{H}^{m,k} = \mathbf{H}_2^{m,k}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{m,k}} = \|\cdot\|_{\mathbf{H}_2^{m,k}}$ と書く．

また $\mathcal{F}\psi$ は ψ の Fourier 変換で,

$$\mathcal{F}\psi \equiv \widehat{\psi} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-ix\xi} \psi(x) dx$$

とし,

$$\mathcal{F}^{-1}\psi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{ix\xi} \psi(\xi) d\xi$$

を ψ の Fourier 逆変換とする．空間 $\mathcal{F}\mathbf{L}^\infty$ を次で定義する:

$$\mathcal{F}\mathbf{L}^\infty = \{\phi \in \mathcal{S}' : \mathcal{F}\phi \in \mathbf{L}^\infty\}.$$

今回は特に, (1) に関する波動作用素及び逆波動作用素の存在を証明し, そこから作られる逆波動作用素と波動作用素の合成写像が定義可能であることを示す.

(1) に関する逆波動作用素は次の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda u^2 + \mu \overline{u}^2, & (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases} \tag{2}$$

を解くことによって定義される．なお, [2], [3] において小さな初期値に対する初期値問題 (2) に関して大域解の存在, 解の時間減衰評価, 解の漸近的振る舞い, 逆波動作用素 $\widetilde{\mathcal{W}_+}$ の存在について研究されている．そこでは $\mathbf{H}^{3,0} \cap \mathbf{H}^{1,2}$ の原点の近傍から $\mathbf{L}^2 \cap \mathcal{F}\mathbf{L}^\infty$ への写像として逆波動作用素 $\widetilde{\mathcal{W}_+}$ が定義されている.

また (1) に関する波動作用素は次の終値問題

$$
(3) \qquad \begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = \lambda u^2 + \mu \overline{u}^2, & (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3, \\ \mathcal{U}(-\infty)u(\infty) = u_+ \end{cases}
$$

を解くことにより定義される. (3) は次のように積分方程式として書くことができる:

$$
(4) \qquad u(t) = \mathcal{U}(t)u_+ + i\int_t^\infty \mathcal{U}(t-\tau)(\lambda u^2 + \mu\overline{u}^2)(\tau)d\tau, \quad (t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3.
$$

ここで, 自由 Schrödinger 発展作用素 $\mathcal{U}(t)$ を

$$
\mathcal{U}(t)\phi = \frac{1}{(2\pi i t)^{\frac{3}{2}}} \int e^{\frac{i|x-y|^2}{2t}} \phi(y)dy
$$

とする. [1] において (1) の波動作用素 $\mathcal{W}_+$ が定義された. そこでは $\mathbf{H}^{3,0} \cap \mathbf{H}^{0,3} \cap \mathbf{H}_1^{2,0}$ の原点の近傍から $\mathbf{L}^2$ への写像として波動作用素 $\mathcal{W}_+$ が定義されている.

ここでは, 逆波動作用素 $\widetilde{\mathcal{W}}_+$ の値域と波動作用素 $\mathcal{W}_+$ の定義域が等しい空間で初期値問題, 終値問題を再び解きなおすことによって, 合成写像 $\mathcal{W}_+\widetilde{\mathcal{W}}_+$ が定義可能であることを示す.

ここで用いられている記号と関数空間について説明する.

$$
\mathbf{Z}_T = \left\{ \phi \in \mathbf{C}([T,\infty); \mathbf{L}^2) : \|\phi\|_{\mathbf{Z}_T} < \infty \right\}
$$

とする. ここで,

$$
\|\phi\|_{\mathbf{Z}_T} = \sup_{t \in [T,\infty)} \left(t^{\frac{3}{4}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{L}^4} + t^{\frac{1}{2}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{L}^2} \right)
$$

である.

逆波動作要素に関して次の結果を得た.

Theorem 1. *Let* $u_0 \in \mathbf{H}^{3,0} \cap \mathbf{H}^{1,2}$ *and* $\varepsilon = \|u_0\|_{\mathbf{H}^{3,0} \cap \mathbf{H}^{1,2}}$. *Then there exists an* $\varepsilon > 0$ *such that* (2) *has a unique global solution* $u \in \mathbf{C}\left(\mathbf{R}; \mathbf{H}^{3,0} \cap \mathbf{H}^{1,2}\right)$ *which satisfies*

$$
\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \le C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}}, \quad \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \le C\varepsilon^{\frac{1}{2}}.
$$

Moreover, there exists a unique final state $\phi_+ \in \mathbf{H}^{1,1}$ *such that*

$$
\left\| \mathcal{U}(-t)u(t) - \phi_+ \right\|_{\mathbf{H}^{1,1}} \le C\varepsilon t^{-\frac{1}{4}}
$$

for $t > 1$. *Namely, the inverse wave operator* $\widetilde{\mathcal{W}}_+$ *is the mapping from the neighborhood of the origin of* $\mathbf{H}^{3,0} \cap \mathbf{H}^{1,2}$ *into* $\mathbf{H}^{1,1}$.

また, 波動作用素に関して次の結果を得た.

Theorem 2. *Let* $u_+ \in \mathbf{H}^{1,1}$ *and the norm* $\rho = \|u_+\|_{\mathbf{H}^{1,1}}$ *be sufficiently small. Then for any positive time* $T \geq 1$ *there exists a unique solution* $u - \mathcal{U}(t)u_+ \in \mathbf{Z}_T$ *to* (4)*. Namely, the wave operator* $\mathcal{W}_+$ *is the mapping from the neighborhood of the origin of* $\mathbf{H}^{1,1}$ *into* $\mathbf{L}^2$*.*

Theorem 1, 2 によって次のことが分かる.

Corollary 1. *The operator* $\mathcal{W}_+\widetilde{\mathcal{W}}_+$ *is well defined as the mapping from the neighborhood of the origin of* $\mathbf{H}^{3,0} \cap \mathbf{H}^{1,2}$ *into* $\mathbf{L}^2$*.*

参考文献

[1] N. Hayashi, Y. Kawahara and P.I. Naumkin, *Lower bounds of asymptotics in time of solutions to nonlinear Schrödinger equations in 3D,* Nonlinear Anal. **65** (2006), 1394-1410.

[2] N. Hayashi, T. Mizumachi and P.I. Naumkin, *Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in 3D,* Differential Integral Equations **16** (2003), 159-179.

[3] Y. Kawahara, *Global existence and asymptotic behavior of small solutions to nonlinear Schrödinger equations in 3D,* Differential Integral Equations **18** (2005), 169-194.

[4] Y. Kawahara, *Wave and inverse wave operators for the quadratic nonlinear Schrödinger equations in 3D*, Osaka J. Math. to appear.