

囲い込み法による 3 次元熱方程式に対する逆問題について

池畠 優 (群馬大学 大学院工学研究科)^{*†}
川下 美潮 (広島大学 大学院理学研究科)^{‡§}

1 熱方程式に対する境界値逆問題と囲い込み法

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域、 $D \subset \Omega$ は開集合で $\bar{D} \subset \Omega$, $\Omega \setminus \bar{D}$ は連結であるとする。さらに、ある $0 < \alpha_0 \leq 1$ に対して $\partial\Omega, \partial D$ は C^{2, α_0} 級 (C^2 級かつ任意の 2 階偏導関数は α_0 次 Hölder 連続) であるとする。 $T > 0$ および $\rho \in C^{0, \alpha_0}(\partial D)$ に対して

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(t, x) = 0 & \text{in } (0, T) \times (\Omega \setminus \bar{D}), \\ (\partial_\nu + \rho(x))u(t, x) = 0 & \text{on } (0, T) \times \partial D, \\ u(0, x) = 0 & \text{on } \Omega \setminus \bar{D} \end{cases} \quad (1.1)$$

をみたく関数 $u(t, x)$ を考える。ただし $\nu(x) = {}^t(\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$ はそれぞれ $\partial\Omega, \partial D$ に対する単位外向き法線ベクトルで、 $\partial_\nu = \partial_{\nu_x} = \sum_{j=1}^3 \nu_j(x) \partial_{x_j}$ である。次の境界値逆問題を考える。

「時間間隔 $(0, T)$ の間、境界 $\partial\Omega$ における温度 u と熱流 $\partial_\nu u$ を一回だけ観測する。 D と ρ の両方が未知であるとするとき、この観測データ

$$\{(u(t, x), \partial_\nu u(t, x)) \mid 0 < t < T, x \in \partial\Omega\} \quad (1.2)$$

を用いて D がある場所、およびその形状を求めることができるか。」

境界値逆問題は昭和 55 年に Calderón によって導体表面における電圧と電流分布から導体内部 (電気伝導率や空洞などについて) の様子を知るとい問題を数学の問題として捉えることが提唱されたことを端を発し、その後盛んに研究され、多くのことが明らかにされてきた ([8], [9, 10], [11] 参照)。

境界値逆問題における大きな考察対象は主に次の 3 つに分けられる。

- 1) 一意性
- 2) 安定性
- 3) 再構成

1) は逆問題における未知量が観測データから一意に定まるかどうかを調べるもので、2) は 1) の下で定まる写像が安定かどうかを調べるものである。これらについては与えられた微分方程式を Cauchy 問題とみたときの解の一意性、またそれを示すための基本的な評価式である Carleman 型評価式と密接な関係があり、多くの研究がある。3) の再構成の目標は逆問題における未知量を観測データから求める手順を与えることであり、いろいろな方法が提唱されているが、その中に囲い込み法 (enclosure method) と呼ばれるものがある。

^{*}Partly supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 18540160 from JSPS

[†]ikehata@math.sci.gunma-u.ac.jp

[‡]Partly supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 19540183 from JSPS

[§]kawasita@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

囲い込み法は本要旨第一著者による [4] で提案され、主に楕円型方程式で法則が記述される境界値逆問題に対して考察されてきた。当初の手順では無限回の観測が必要であったが、その後、[3] で一回のみ観測を行うことにより得たデータから内部情報の一部を取り出せる方法が提示された。その後一回の観測のみから何が分かるかについて主に楕円型方程式のときに考察されてきた ([5] およびその参考文献参照)。

この要旨では 3 次元空間における熱方程式に対する境界値逆問題について考察する。この場合の一意性、安定性については既に多くの仕事がある (例えば [1], [2], [12] 及びそれらの参考文献参照)。そこで、囲い込み法により D についてどのような情報が引き出せるかについて考察する。

2 指示関数と空洞 D

観測データから内部の情報を得るためにはそれらの間をつなぐものが必要になる。囲い込み法では指示関数 (indicator function) と呼ばれるものがその役割を果たす。 $p \notin \Omega$ を任意に一つ選び、

$$v_\tau(t, x; p) = e^{-\tau^2 t} E_\tau(x, p) \quad (\tau > 0), \quad \text{但し} \quad E_\tau(x, y) = \frac{e^{-\tau|x-p|}}{2\pi|x-p|} \quad (2.1)$$

と定める。 $v_\tau(t, x; p)$ は (1.1) の形式的な随伴方程式の解であるが、これを用いて指示関数 $I(\tau, p)$ を次で定める。

$$I(\tau, p) = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v_\tau}{\partial \nu} u - \frac{\partial u}{\partial \nu} v_\tau \right) dS_x dt. \quad (2.2)$$

この指示関数 $I(\tau, p)$ の $\tau \rightarrow \infty$ の挙動を調べることにより、 ∂D に関する情報を引き出すことが目標である。

結論を荒く言えば、 D が狭い意味で凸 (すなわち境界の各点における Gauss 曲率が 0 ではない) という仮定に加え、点 p と $\partial\Omega$, ∂D の位置関係に関する仮定、および観測データ $\partial_\nu u(t, x)$ に対する仮定のもとで

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \log |I(\tau, p)| = -l_{min} \quad (2.3)$$

となることを示すことができる。但し、 l_{min} は次で定まる量である。

$$l_{min} = \inf_{(x,y) \in \partial D \times \partial\Omega} l_p(x, y) \quad \text{但し} \quad l_p(x, y) = |p-x| + |x-y|.$$

(2.3) の解釈は 1 次元の場合と比較すると分かりやすい。1 次元の対応物は [7] により考察され、これが 3 次元の場合を考察するための基礎となった (この解釈についての詳しい情報は [6] 参照)。一次元の場合、すなわち (1.1) において $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$, $D = (a, b)$ ($0 < a < b < L$) とすると、 $\Omega \setminus \bar{D} = (0, a) \cup (b, L)$ となる。これは連結でないので、一つの連結成分、例えば $(0, a)$ のみを考えればよい。このとき $x = 0$ が既知の境界、 $x = a$ が未知の境界、 $(u(t, 0), \partial_x u(t, 0))$ ($0 < t < T$) が観測データである。(2.1) における $E_\tau(\cdot, p)$ は $(\Delta - \tau^2)E_\tau = -2\delta(\cdot - p)$ である。この意味で一次元の場合に対応するものは $\tilde{E}_\tau(x, p) = \tau^{-1} e^{-\tau|x-p|}$ (但し $p < 0$) である。この $\tilde{E}_\tau(x, p)$ に対して (2.2) と同様に指示関数 $I^{(1)}(p, \tau)$ を導入すれば次が成り立つ。

Theorem 2.1 (Ikehata[7]) $p < 0$ とする。定数 $\beta_0 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{\beta_0} \left| \int_0^T u_x(0, t) e^{-\tau^2 t} dt \right| > 0 \quad (2.4)$$

が成り立つとすると $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-1} \log |I^{(1)}(\tau, p)| = -(|p| + 2a)$ となる。

定理 2.1 において現れた量 $|p| + 2a$ は点 $x = 0$ ($\partial\Omega$ に対応) から出発し $x = a$ (∂D に対応) で跳ね返り点 p に戻る折れ線の長さである。(2.3) における l_{min} はこの状況が反映されているものと考えられる。しかし、3次元の場合は l_{min} を与える点 $(x_0, y_0) \in \partial D \times \partial\Omega$ の位置については複雑になる。

$l_p(x_0, y_0) = l_{min}$ となる点 $(x_0, y_0) \in \partial D \times \partial\Omega$ の全体を $\mathcal{M}(p)$ で表す。また次の集合を導入する。

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(p) &= \{(x, y) \in \mathcal{M}(p) \mid x \in \mathcal{G}^+(p), \nu_x \cdot (y - x) > 0\}, \\ \mathcal{M}_2^\pm(p) &= \{(x, y) \in \mathcal{M}(p) \mid x \in \mathcal{G}^\pm(p), \pm \nu_x \cdot (y - x) < 0\}, \\ \mathcal{M}_g(p) &= \{(x, y) \in \mathcal{M}(p) \mid x \in \mathcal{G}(p)\}.\end{aligned}$$

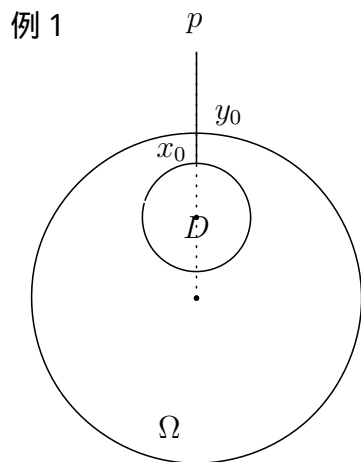
但し、 $\mathcal{G}(p)$, $\mathcal{G}^\pm(p)$ は次で定義される集合である。

$$\mathcal{G}(p) = \{x \in \partial D \mid \nu_x \cdot (p - x) = 0\}, \quad \mathcal{G}^\pm(p) = \{x \in \partial D \mid \pm \nu_x \cdot (p - x) > 0\}.$$

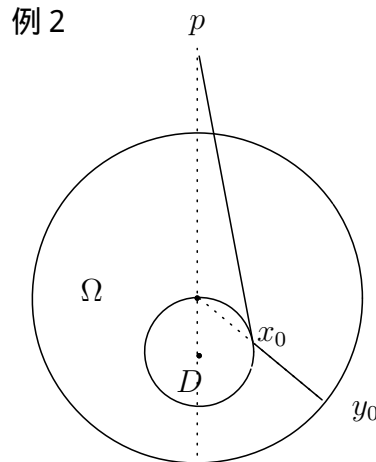
Proposition 2.2 次が成り立つ。

- 1) $\mathcal{M}(p) = \mathcal{M}_1(p) \cup \mathcal{M}_2^+(p) \cup \mathcal{M}_2^-(p) \cup \mathcal{M}_g(p)$ が成り立つ。
- 2) $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_2^+(p) \cup \mathcal{M}_2^-(p) \cup \mathcal{M}_g(p)$ ならば x_0 は線分 py_0 上にある。
- 3) D が狭い意味で凸のとき、任意の $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_2^\pm(p)$ に対して $x_0^* \in \mathcal{G}^\mp(p)$ で $(x_0^*, y_0) \in \mathcal{M}_2^\mp(p)$ となるものがただ一つだけ存在する (複合同順)。

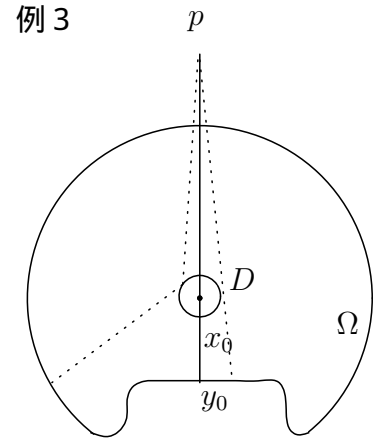
$(x_0, y_0) \in \mathcal{M}(p)$ で 1次元の場合に対応するのは $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_1(p)$ でありさらに y_0 が線分 px_0 上にある場合のみである。一般にはそれ以外の $\mathcal{M}_1(p)$ の元や $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}(p) \setminus \mathcal{M}_1(p)$ となるものが存在する。これらの存在が状況を複雑にしている。



一次元に対応する場合



$(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_1(p)$ だが
一次元とは異なる場合



$\mathcal{M}_2^\pm(p)$ の元しかない

3 指示関数の漸近挙動

この節ではどのような仮定の下で (2.3) が成り立つかを述べる。(1.1) の解 $u(t, x)$ に対して

$$\tilde{u}(x; \lambda) = \int_0^T u(t, x) e^{-\lambda^2 t} dt \quad (x \in \Omega), \quad g(x, \tau) = \int_0^T e^{-\lambda^2 t} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) dt \quad (x \in \partial\Omega)$$

とおく。但し $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$ である。次の楕円型境界値問題の解 $w(x; \lambda)$ を考える。

$$\begin{cases} (\Delta - \lambda^2)w(x; \lambda) = 0 & \text{in } \Omega \setminus \overline{D}, \\ (\partial_\nu + \rho(x))w(x; \lambda) = 0 & \text{on } \partial D, \\ \partial_\nu w(x; \lambda) = g(x; \lambda) & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

(1.1) により $\tilde{u}(x; \tau) = w(x; \tau) + O(e^{-\tau^2 T})$ ($\tau \rightarrow \infty$) となることに注意すれば部分積分により

$$I(\tau, p) = I_0(\lambda, p)|_{\lambda=\tau} + O(\tau e^{-\tau^2 T}) \quad (\tau \rightarrow \infty) \quad (3.2)$$

となる。但し、 $I_0(\lambda, p)$ は次で定義されるものである。

$$I_0(\lambda, p) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial E_\lambda}{\partial \nu} + \rho E_\lambda \right) (x, p) w(x, \lambda) dS_x \quad (\lambda \in \mathbb{C}, |\arg \lambda| < \pi/2). \quad (3.3)$$

(3.2) に注意すれば、上の $I_0(\tau, p)$ の漸近挙動を調べればよいことが分かる。これを (3.3) を用いて調べることが問題となる。以下、 $\delta_0 > 0$ に対して $\mathbb{C}_{\delta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \geq \delta_0 |\operatorname{Im} \lambda|\}$ とおく。

Theorem 3.1 ∂D は狭い意味で凸とし、 $\mathcal{M}_g(p) = \emptyset$ かつ任意の $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}(p) \setminus \mathcal{M}_g(p)$ で $l_p(x, y)$ は非退化であるとする。このとき $\mathcal{M}(p)$ は有限集合である。さらに各 $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_1(p) \cup \mathcal{M}_2^-(p)$ に対する正定数 $C(x_0, y_0) > 0$ が存在して次が成り立つ。

$$I_0(\lambda, p) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda l_{\min}} \{ A(\lambda, p)g + \|g(\cdot, \lambda)\|_{C^{0, \alpha_0}(\partial\Omega)} O(\lambda^{-\alpha_0/2}) \} \quad (\lambda \in \mathbb{C}_{\delta_0}, |\lambda| \rightarrow \infty),$$

$$A(\lambda, p)g = \sum_{(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_1(p)} C(x_0, y_0)g(y_0, \lambda) - \sum_{(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_2^-(p)} C(x_0, y_0)g(y_0, \lambda).$$

Theorem 3.1 と (3.2) より次を得る。

Corollary 3.2 Theorem 3.1 における仮定に加え、定数 $\beta_0 \in \mathbb{R}$ が存在して $g(x, \tau)$ が

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{\beta_0} |A(\tau, p)g| > 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{\beta_0 - \alpha_0/2} \|g(\cdot, \tau)\|_{C^{0, \alpha_0}(\partial\Omega)} = 0 \quad (3.4)$$

を満たすとすると (2.3) が成り立つ。但し、 $A(\tau, p)g$ は Theorem 3.1 におけるものである。

Corollary 3.2 の仮定 (3.4) は 1 次元の場合の仮定 (2.4) に対応している。一回の観測から得られるデータを用いて指示関数の漸近挙動を調べることにより l_{\min} を得るためには (3.4) や (2.4) を満たすように与える熱流を制御すればよいということが Theorem 2.1 や Corollary 3.2 から分かる。

Theorem 3.1 における仮定を満たす十分条件としては次のものがある。

Proposition 3.3 $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}(p) \setminus \mathcal{M}_g(p)$ に対して $y_0 \in \partial\Omega$ における $\partial\Omega$ の主曲率の最大値が l_{\min}^{-1} より小さければ $l_p(x, y)$ は (x_0, y_0) で非退化である。

Proposition 3.3 の仮定を落とすと $l_p(x, y)$ の非退化性は一般には成り立たない。例 2 で Ω は原点 O 中心、半径 $R > 0$ の球とすると $R < l_{\min}$ となっている。 $\partial\Omega$ の主曲率はすべて R^{-1} だから Proposition 3.3 の仮定を満たさない。この場合、直線 Op に関する回転対称性より l_{\min} を与える点はすべて退化していることが分かる。

$\mathcal{L}(p) = \{y \in \partial\Omega \mid (y - p)/|y - p| \cdot \nu_y = 1\}$ とおく。関数 $\partial\Omega \ni y \mapsto |y - p| \in \mathbb{R}$ の最大値を与える点 y_0 は $y_0 \in \mathcal{L}(p)$ となる。 $\mathcal{M}(p) = \mathcal{M}_1(p)$ となるための十分条件としては次のものがある。

Proposition 3.4 集合 $\mathcal{L}(p)$ が一点のみからなる集合とすると $\mathcal{M}_2^+(p) \cup \mathcal{M}_2^-(p) \cup \mathcal{M}_g(p) = \emptyset$ となる。

前述の例 1 を考える。 Ω は中心が原点 O で半径が R , D は中心が q で半径 r の開球 ($|q| + r < R$) とし、 D の中心は線分 Op 上にあるとする。このとき Proposition 3.4 より $\mathcal{M}(p) = \mathcal{M}_1(p)$ となるが、より詳しく $\mathcal{M}_1(p) = \{(q + r\omega, R\omega)\}$ (但し $\omega = |p|^{-1}p$) が分かる。よって $l_{min} = h + 2(R - r - |q|)$ (但し $h = \text{dist}(p, \partial\Omega)$) となる。 Proposition 3.3 と Corollary 3.2 より $l_{min} < R$ のとき、すなわち $h < 2(r + |q|) - R$ のとき (3.4) を満たせば指示関数から l_{min} の値が分かることになる。故に D がある程度大きければ p を $\partial\Omega$ の近くに選ぶことにより $\sup_{x \in D} \omega \cdot x = R + 2^{-1}(h - l_{min})$ 、すなわち $D \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \omega \cdot x \leq R + 2^{-1}(h - l_{min})\}$ が分かる。

Proposition 3.3 で与えた十分条件は $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_1(p)$ のときはもう少し弱めることができ、 D の大きさに関する制約は緩められることが分かる。また、一般の場合に l_{min} から D の大きさ (例えば凸包) を推定するのは今後の課題である。さらに今回は (2.1) を用いて定めた指示関数 $I(\tau, p)$ に関して議論したが、 v_τ の選び方を変えたらどうなるかという問題もある。これについては [6] においてこれまでの囲い込み法に関する研究をふまえた問題提起がなされている。 Theorem 3.1 および Corollary 3.2 はこの中の一つに答えたものである。

4 定理 3.1 の証明

定理 3.1 の証明は (3.1) の解 $w(x, \lambda)$ の一重層ポテンシャル

$$V_\Omega(\lambda)g(x) = \int_{\partial\Omega} E_\lambda(x, y)\varphi(x, \lambda)dS_y, \quad V_D(\lambda)h(x) = \int_{\partial D} E_\lambda(x, z)\psi(z, \lambda)dS_z,$$

による表現 $w(x, \lambda) = V_\Omega(\lambda)\varphi(x, \lambda) + V_D(\lambda)\psi(x, \lambda)$ を用いる。 $\varphi(\cdot, \lambda)$, $\psi(\cdot, \lambda)$ が満たす積分方程式は $\text{Re } \lambda$ が十分大きいとき Neumann 級数により解くことができ、 $\varphi(\cdot, \lambda) \in C^{0, \alpha_0}(\partial\Omega)$, $\psi(\cdot, \lambda) \in C^{0, \alpha_0}(\partial D)$ の存在は分かる。この解の表示を (3.3) に代入し整理すれば $I_0(\lambda, p) = \lambda I_{00}(\lambda, p) + I_{01}(\lambda, p)$, の形になる。但し、

$$I_{0j}(\lambda, p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\partial\Omega} dS_y \varphi(y, \lambda) \int_{\partial D} e^{-\lambda l_p(x, y)} G_j(x, y, p, \lambda) dS_x, \quad j = 0, 1 \quad (4.1)$$

である。ここで $G_j(x, y, p, \lambda)$ ($j = 0, 1$) は $\partial\Omega$ 上の積分作用素 $M_j(\lambda)$ により

$$F_j(x, p, \lambda) = e^{\lambda|x-p|} \left(M_j(\lambda) \left(\frac{e^{-\lambda|\cdot-p|}}{|\cdot-p|} \right) \right) (x), \quad j = 0, 1 \quad (4.2)$$

で与えられる関数 $F_j(x, p, \lambda)$ に対して $F_0(x, p, \lambda) + F_1(x, p, \lambda)$ の連続関数係数の一次式の形になっている。

定理 3.1 は (4.1) に Laplace 法を用いて示されるが、そのためには振幅関数 $G_j(x, y, p, \lambda)$ の $|\lambda| \rightarrow \infty$ のときの評価が必要になる。すなわち $F_j(x, p, \lambda)$ について次を示すことが重要になる。 $\delta > 0$ に対して $\mathcal{G}_\delta(p) = \{x \in \partial D \mid \text{dist}(x, \mathcal{G}(p)) \geq \delta\}$, $\mathcal{G}_\delta^\pm(p) = \mathcal{G}_\delta(p) \cap \mathcal{G}^\pm(p)$. とおく。

Lemma 4.1 定数 $\mu_0 > 0$, $C > 0$ および $\delta > 0$ に依存する定数 $C_\delta > 0$ が存在して次が成り立つ。

- (1) $|F_j(x, p, \lambda)| \leq C \text{Re } \lambda$ ($x \in \partial D$, $\lambda \in \mathbb{C}_{\delta_0}$, $\text{Re } \lambda \geq \mu_0$, $j = 0, 1$).
- (2) $|F_j(x, p, \lambda)| \leq C_\delta (\text{Re } \lambda)^{-1}$ ($x \in \mathcal{G}_\delta^+(p)$, $\lambda \in \mathbb{C}_{\delta_0}$, $\text{Re } \lambda \geq \mu_0$, $j = 0, 1$).
- (3) $|F_1(x, p, \lambda)| \leq C_\delta (\text{Re } \lambda)^{-1}$ ($x \in \mathcal{G}_\delta^-(p)$, $\lambda \in \mathbb{C}_{\delta_0}$, $\text{Re } \lambda \geq \mu_0$).
- (4) $\left| F_0(x, p, \lambda) + \frac{1}{|x-p|} \right| \leq C_\delta (\text{Re } \lambda)^{-\alpha_0/2}$ ($x \in \mathcal{G}_\delta^-(p)$, $\lambda \in \mathbb{C}_{\delta_0}$, $\text{Re } \lambda \geq \mu_0$).

$M_j(\lambda)$ の積分核を $M_j(x, y, \lambda)$ で表す。 $M_0(x, y, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} e^{-\lambda|x-y|} \frac{\nu(y) \cdot (x-y)}{|x-y|^2}$ であるが、 $M_1(\lambda)$ は $M_1(\lambda) = \tilde{M}(\lambda) + ({}^t Y_{22}(\lambda))^2 (I - {}^t Y_{22}(\lambda))^{-1}$ という形をしている。ここで $\tilde{M}(\lambda)$ と $Y_{22}(\lambda)$ は

$$|K_\lambda(x, y)| \leq C_0 \mu e^{-\mu|x-y|}, \quad |\tilde{K}_\lambda(x, y)| \leq \frac{C_3 e^{-\mu|x-y|}}{|x-y|} \quad (x, y \in \partial D, x \neq y, \mu = \operatorname{Re} \lambda > 0) \quad (4.3)$$

と評価される可測関数 $K_\lambda(x, y)$ と $\tilde{K}_\lambda(x, y)$ の和からなる関数を積分核として持つ積分作用素である。よって Lemma 4.1 を得るためには $(I - {}^t Y_{22}(\lambda))^{-1} - I = {}^t Y_{22}(\lambda)(I - {}^t Y_{22}(\lambda))^{-1}$ の積分核の評価が必要になる。この評価を得るための重要な部分は次で与えられる。

Theorem 4.2 (4.3) の評価をもつ $\partial D \times \partial D$ 上の可測関数 $K_\lambda(x, y)$ を積分核にもつ ∂D 上の積分作用素を K_λ とする。このとき定数 $\mu_0 > 0$ が存在して $\operatorname{Re} \lambda \geq \mu_0$ のとき作用素 $K_\lambda(I - K_\lambda)^{-1}$ は ∂D 上の積分作用素である。さらに、任意の $\delta_0 > 0$ に対して

$$|K_\lambda^\infty(x, y)| \leq C_{\delta_0} \mu e^{-\mu|x-y|} \quad (x, y \in \partial D, \lambda \in \mathbb{C}_{\delta_0}, \mu = \operatorname{Re} \lambda \geq \mu_0)$$

となる定数 $C_{\delta_0} > 0$ が存在する。但し、 $K_\lambda^\infty(x, y)$ は作用素 $K_\lambda(I - K_\lambda)^{-1}$ の積分核である。

Theorem 4.2 を用いれば $M_1(x, y, \lambda)$ についても次の評価を得ることが分かる。

$$|M_1(x, y, \lambda)| \leq C \left(\mu + \frac{1}{|x-y|} \right) e^{-\mu|x-y|} \quad (x, y \in \partial D, \lambda \in \mathbb{C}_{\delta_0}, \mu = \operatorname{Re} \lambda \geq \mu_0)$$

ここで指数関数の形 $e^{-\mu|x-y|}$ が $M_0(x, y, \lambda)$ や (4.3) に現れている形と同じになっていることが重要である。この事実を用いることにより Lemma 4.1 を示すことができる。

References

- [1] K. Bryan and L. F. Caudill, Jr., Uniqueness for a boundary identification problem in thermal imaging, In: Differential Equations and Computational Simulations III J. Graef, R. Shivaji, B. Soni J. and Zhu (Editors), Electronic Journal of Differential Equations, Conference 01(1997), pp. 23-39, URL: <http://www.ma.hw.ac.uk/EJDE/index.html>
- [2] B. Canuto, E. Rosset and S. Vessella, Quantitative estimate of unique continuation for parabolic equations and inverse initial-boundary value problems with unknown boundaries, Trans. Amer. Math. Soc., **354**(2002), 491-535.
- [3] M. Ikehata, Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data, Inverse Problems, **15** (1999), 1231-1241.
- [4] M. Ikehata, Reconstruction of the support functions for inclusion from boundary measurements, J. Inv. Ill-Posed Problems, **8** (2000), 367-378.
- [5] M. Ikehata, The Herglotz wave functions, the Vekua transform and the enclosure method, Hiroshima Math. J., **35** (2005), 485-506.
- [6] M. Ikehata, Virtual signal in the heat equation and the enclosure method, Inverse Problems in Applied Sciences-towards breakthrough, Journal of Physics:Conference Series, **73**(2007), 012010.
- [7] M. Ikehata, Extracting discontinuity in a heat conductive body. One-space dimensional case, Applicable Analysis, **86** (2007), 963-1005.
- [8] 池島優, 中村玄, 境界値逆問題... Calderón からの 15 年, 数学, **48** (1996), 259-281.
- [9] 磯崎洋, 量子力学的散乱理論における逆問題, 数学, **50** (1998), 163-180.
- [10] 磯崎洋, 散乱理論と逆問題, 数学, **59** (2007), 113-130.
- [11] 中村玄, 弾性体の逆問題, 数学, **53** (2001), 113-124.
- [12] S. Vessella, Quantitative estimates of unique continuation for parabolic equations, determination of unknown time-varying boundaries and optimal stability estimates, Inverse Problems **24** (2008) 023001