The variational problem for a certain action functional defined on closed curves

岡部 真也
（東北大学大学院理学研究科）

本講演では次の問題を考える:

問題 1. 平面内の閉曲線 Γ_0 と Γ_1, 正定数 $T > 0$ を与える. このとき, 次の汎函数

$$E(\gamma) := \int_0^T \oint_{\gamma(t)} \{\kappa(t)^2 + \nu(t)^2\} \, dsdt \tag{AF}$$

を $S = \{\{\gamma(t)\}_{t=0}^T \mid \gamma(0) = \Gamma_0,\ \gamma(T) = \Gamma_1\}$ 上で最小化せよ. ただし, s は γ の弧長パラメータ, $\kappa(t)$ と $\nu(t)$ は, それぞれ, γ の曲率と法方向への変形速度を表す.

この問題の背景には, 近年研究が行われている Stochastic Allen-Cahn 方程式に対する Action minimization （例えば, [2], [3], [6] など）がある. この問題について, 例えば次のような空間一次元における Allen-Cahn 方程式に対する初期値境界値問題の場合に紹介する:

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon u_{xx} - \varepsilon^{-1} W'(u), & x \in [0,1], \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{A-C}$$

ただし, $W(u) = (1-u^2)^2/4$ とする. よく知られているように Allen-Cahn 方程式はエネルギー汎函数

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \varepsilon {u_x}^2 + \frac{2}{\varepsilon} W(u) \right\} dx$$

に対する steepest descent flow であり, $E(u)$ の minimizer である $u_{\pm}(x) := \pm 1$ はこの flow のもと安定である. 従って, 当然のことながら, 一方の minimizer を初期値ととったときに (A-C) の解が他方の minimizer へと収束することは起こりえない. 一方で, 次のような Stochastic Allen-Cahn 方程式に対する同様の問題

$$\begin{cases} u_t = \varepsilon u_{xx} - \varepsilon^{-1} W'(u) + \sqrt{\delta}\eta, & x \in [0,1], \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & u(x,0) = u_+(x) \end{cases} \tag{S-AC}$$

を考えるとその状況は異なる. ただし, δ は正のパラメータ, η は white noise を表す. (S-AC) においては, u_+ から u_- へ $[0,T]$ の間に遷移する確率 P_T が存在し,

$$\lim_{\delta\to 0}\delta\log P_T = -\min_{u\in\mathscr{A}} S_T(u)$$

が成り立つことが大偏差原理によって知られている ([1]). ただし, $\mathscr{A}=\{u(\cdot,0)=u_+,\ u(\cdot,t)=u_-\ \text{ for some }\ t\le T\}$ であり, Action と呼ばれる汎函数 $S_T(u)$ は次で与えられる:

$$S_T(u)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^1\left\{u_t-\varepsilon u_{xx}+\varepsilon^{-1}W'(u)\right\}^2\,dxdt.$$

よって, S_T の minimizer は most likely switching passway ということになる. 空間二次元以上に対するこの問題において特異極限 $\varepsilon\to 0$ をとるとき, S_T の Γ 極限として得られる汎函数の中に

$$\frac{c_0}{4}\int_0^T\int_{\partial S(t)}(v_n+\kappa)^2 d\sigma dt$$

が現れる ([2]). ただし, $S(t)$ は界面を, v_n と κ は, それぞれ, 界面の法方向への変形速度と曲率を表す. 問題 1 はこのような問題を一つの動機としている.

まず, 問題 1 を動径対称な場合, つまり初期曲線と終期曲線および $\gamma(t)$ が全て円である場合について考察する. この場合, 適当な scaling をとることにより, 問題 1 は次のように表される:

問題 2. 正定数 r_0, r_1, T を与える. このとき, 次の汎函数

(R-AF) $$\mathscr{E}(\gamma):=\int_I\left\{\frac{1}{R(t)^2}+R'(t)^2\right\}R(t)\chi_{\{R>0\}}\,dt$$

を $S=\{\{R(t)\}_{t=0}^T \mid R(0)=r_0,\ R(1)=r_1\}$ 上で最小化せよ. ただし, $I=(0,1)$ であり, χ は特性函数を表す.

汎函数 (R-AF) は特性函数を含むため, 直接的方法を用いて minimizer の存在を証明することや Euler-Lagrange 方程式を導出することは困難である. しかし,

$$\mathscr{D}_\alpha:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>\alpha\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\le y\}$$

とするとき, $(r_0,r_1)\in\mathscr{D}_\alpha$, $\alpha\ge 2$ であれば, 問題 2 の minimizer に対して次が従う:

補題 1. $\alpha\ge 2$, $(r_0,r_1)\in\mathscr{D}_\alpha$ とする. このような r_0, r_1 に対する問題 2 の minimizer $r(t)\in H^1(I)$ が存在するならば, r_0, r_1, α のみに依存する正定数 K が存在し

$$r(t)\ge K \qquad (\forall t\in\bar{I})$$

が成り立つ.

補題 1 により従う正値性から, この場合には問題 2 に対し直接的方法を適用することができ, minimizer の存在が証明される. さらに, 一般的な正則性の議論により, minimizer は $C^2(\bar{I})$ に属することが従い, この場合の Euler-Lagrange 方程式

$$2r(t)r''(t)+r'(t)^2+r(t)^{-2}=0$$

を解くことにより, $(r_0,r_1)\in\mathscr{D}_2$ に対して問題 2 の minimizer を分類することができる. この中で特に, 平均曲率流 $r'=1/r$ に従う minimizer を以下 $H(t)$ と表す.

次に非動径対称な場合について考察する. ここでは特に, $H(t)$ の近傍における非動径対称な臨界点の存在について考える. そのために, γ を

$$\gamma(\theta,t):=r(\theta,t)\omega(\theta)$$

と表示する. ただし, $\omega(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}=S^1$, $t\in[0,T]$ である. ここで, $H(t)$ の正値性から $r>0$ と仮定し, 適当な scaling をとることにより, エネルギー汎函数 (AF) は

(N-AF) $$E(\gamma(\theta,t))=\int_I\int_{S^1}\left\{r_t(\theta,t)^2+\kappa(\theta,t)^2\right\}|\gamma_\theta|\,d\theta dt$$

と書くことができる. ただし,

$$\kappa(\theta,t)=\frac{2r_\theta(\theta,t)^2+r(\theta,t)^2-r(\theta,t)r_{\theta\theta}(\theta,t)}{|\gamma_\theta|^3},\qquad |\gamma_\theta|=\{r^2+(r_\theta)^2\}^{(1/2)}$$

である. 汎函数 (N-AF) に対する Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned}&-2(r_t|\gamma_\theta|)_t+{r_t}^2r|\gamma_\theta|^{-1}-\left({r_t}^2r_\theta|\gamma_\theta|^{-1}\right)_\theta-\left\{\kappa(-2{r_\theta}^2+3r^2+5rr_{\theta\theta})r_\theta|\gamma_\theta|^{-4}\right\}_\theta\\&\quad-2\left\{\kappa r|\gamma_\theta|^{-2}\right\}_{\theta\theta}-\kappa(6r{r_\theta}^2+r^3+2{r_\theta}^2r_{\theta\theta}-3r^2r_{\theta\theta})|\gamma_\theta|^{-4}=0\end{aligned}$$

と導出される. 以下, この左辺を $F(r)$ と表す. よって求める非動径対称な臨界点は

$$\mathscr{F}(\hat{h}(\theta,t);r_0):=F(H(t;r_0)+\hat{h}(\theta,t))$$

とおけば, 次の初期値終期値問題の解として得られることになる:

(IFP) $$\begin{cases}\mathscr{F}(\hat{h}(\theta,t);r_0)=0 & \text{in}\quad S^1_I,\\ \hat{h}(\theta,0)=u_0(\theta), & \hat{h}(\theta,1)=u_1(\theta).\end{cases}$$

ただし, $S^1_I=S^1\times I$ である. 主結果を述べるために記号を幾つか準備する. まず, 初期終期データ u_0, u_1 は u_0, $u_1\in C^{4+\alpha}(S^1)\cap H^5(S^1)$ とする. ここで, $C^{4+\alpha}$ と H^5 は通常の Hölder 空間と Sobolev 空間を表す. パラメータ β と ρ を

$$\beta:=\max\left\{|u_0|^{4+\alpha}_{S^1},|u_1|^{4+\alpha}_{S^1}\right\},\qquad \rho:=\max\left\{\left\|\partial^4_\theta u_0\right\|_{H^1(S^1)},\left\|\partial^4_\theta u_1\right\|_{H^1(S^1)}\right\}$$

と定義する．$C^{(m+\alpha)}(\overline{S^1_I})$ を $\partial_t^p\partial_\theta^q$ $(2p+q\le m)$ なる形の導関数とともに $\overline{S^1_I}=S^1\times\bar{I}$ 上 α-Höllder 連続であるような函数のなす Banach 空間とする．ただし, $m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<1$ である．その norm を $|\cdot|^{(m+\alpha)}_{S^1_I}$ と表す．（この norm の詳細な定義は [4] を参照されたい.）また, $(W_2^{2m,m}(S^1_I),\|\cdot\|_{W_2^{2m,m}(S^1_I)})$ を $\partial_t^p\partial_\theta^q$ $(2p+q\le 2m)$ なる形の導関数とともに $L^2(S^1_I)$ に属す函数全体の集合として定義する．とくに, $W_2^{1,0}(S^1_I)$ を導関数 ∂_θ とともに $L^2(S^1_I)$ に属す函数から成る Banach 空間とする．$C^{(4+\alpha)}(\overline{S^1_I})$ と $W_2^{1,0}(S^1_I)$ を用いて, 空間 $\mathscr{M}$ を

$$\|u\|_{\mathscr{M}}:=|\varphi|^{(4+\alpha)}_{S^1_I}+\left\|\partial_\theta^4\varphi\right\|_{W_2^{1,0}(S^1_I)}+\left\|\partial_t^2\varphi\right\|_{W_2^{1,0}(S^1_I)}<+\infty$$

なる函数全体の集合として定義する．そして $\mathscr{M}$ から

$$\mathscr{N}_{\varepsilon,\delta}=\{g\in\mathscr{M}\;\Big|\;|g|^{(4+\alpha)}_{S^1_I}\le\varepsilon,\ \max\{\left\|\partial_t^2 g\right\|_{W_2^{1,0}(S^1_I)},\left\|\partial_\theta^4 g\right\|_{W_2^{1,0}(S^1_I)}\}\le\delta,\\ g(\cdot,0)=u_0(\cdot),\ g(\cdot,1)=u_1(\cdot)\}$$

を定義する．このとき, 本講演の主結果は次のように述べることができる:

定理 1. ([5]) 十分小さな正数の組 (ε,δ) をとる．(ε,δ) に応じて (β,ρ) を十分小さく選ぶならば, 初期値終期値問題 (IFP) は一意解 $\hat{h}\in\mathscr{N}_{\varepsilon,\delta}$ をもつ.

定理の証明は, $\mathscr{F}$ の H に関する線形化作用素に対する初期値終期値問題

$$\text{(LIFP)}\qquad\begin{cases}\dfrac{1}{H^3}\partial_\theta^4\phi+\dfrac{2}{H^3}\partial_\theta^2\phi-H\partial_t^2\phi-\dfrac{1}{H}\partial_t\phi+\dfrac{2}{H^3}\phi=f(\theta,t)\quad\text{in}\quad S^1_I,\\ \phi(\theta,0)\equiv 0,\qquad\phi(\theta,1)\equiv 0,\end{cases}$$

の解の存在およびその解の regularity に関する結果を利用して, 縮小写像の原理を用いて与えられる．講演では, 線形化問題 (LIFP) の可解性およびその解の正則性に重点をおいて述べる予定である.

参考文献

[1] W. G. Faris and G. Jona-Lasinio, *Large fluctuations for a nonlinear heat equation with noise*, J. Phys. A, **15** (1982), 3025–3055.

[2] R. V. Kohn, F. Otto, M. G. Reznikoff, and E. Vanden-Eijnden, *Action minimization and sharp-interface limits for the stochastic Allen-Cahn equation*, Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), no. 3, 393–438.

[3] R. V. Kohn, M. G. Reznikoff, and Y. Tonegawa, *Sharp interface limit of the Allen-Cahn action functional in one space dimension*, Calc. Var. Partial Differential Equations **25** (2006), no. 4, 503–534.

[4] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonikov, and N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, Amarican Mathematical Society.

[5] S. Okabe, *The variational problem for a certain action functional defined on planar closed curves*, in preparation (2008).

[6] E. Weinan, W. Ren, and E. Vanden-Eijnden, *Minimum action method for the study of rare events*, Comm. Pure Appl. Math., **57** (2004), no. 5, 637–656.