非線形の波動方程式と Klein–Gordon 方程式の連立系に対する大域解の存在

片山 聡一郎 (和歌山大学 教育学部)

1　序

次の非線形双曲型方程式系の初期値問題を考える:

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} (\Box + m_i^2)u_i = F_i(u, \partial u), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \\ & (i = 1, 2, \ldots, N), \\ u(0,x) = \varepsilon f(x),\ (\partial_t u)(0,x) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}
$$

ここで $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$, $u = (u_j)_{1 \le j \le N}$, $\partial u = (\partial_a u_j)_{0 \le a \le 3, 1 \le j \le N}$ である. ただし

$$
\partial_0 = \partial_t, \quad \partial_k = \partial_{x_k}\ (k = 1, 2, 3)
$$

という記号を用いた. また, $m_i \ge 0$ $(1 \le i \le N)$ とする. 以下, 関数は全て実数値のもののみを考える.

簡単のため $f = (f_j)_{1 \le j \le N}$, $g = (g_j)_{1 \le j \le N} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^N)$ と仮定する. ε は正のパラメータである. 以下では, 十分小さい ε のみを考える. すなわち小さな初期値のみを考える.

非線形項 $F = (F_j)_{1 \le j \le N}$ は滑らかであって, $(u, \partial u) = (0, 0)$ の近くでは 2 次のオーダーとする.

どのような場合に, 十分小さい初期値に対して (1.1) が (時間) 大域解を持つのかを調べるのが目的である. まず, 既知の結果について述べておく.

(1) 非線形波動方程式系 (すなわち $m_1 = \cdots = m_N = 0$) の場合: ある種の 2 次の非線形項に対しては, どんなに ε が小さくても有限時間で解が爆発することが知られている (John '79). 従って, 2 次の項になんらかの制限が必要になる. 以下, 一般に $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{R}^d$ の関数 $G(z)$ に対して, そのマクローリン展開の 2 次の部分を $G^{(2)}$ と書く. すなわち

$$
(1.2)\qquad G^{(2)}(z) = \sum_{|\beta|=2} \frac{(\partial_z^\beta G)(0)}{\beta!} z^\beta,\ z \in \mathbb{R}^d.
$$

Definition 1.1 (null 条件) 各 F_i $(1 \le i \le N)$ に対して

$$
(1.3)\qquad F_i^{(2)}\big((\lambda_j)_{1 \le j \le N}, (X_a \mu_j)_{0 \le a \le 3, 1 \le j \le N}\big) = 0
$$

が, 任意の $\lambda=(\lambda_j)_{1\le j\le N}$, $\mu=(\mu_j)_{1\le j\le N}\in\mathbb{R}^N$ と, $X_0^2-X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$ を満たす任意の $X=(X_a)_{0\le a\le 3}\in\mathbb{R}^4$ に対して成立するとき, $F=(F_i)_{1\le i\le N}$ は *null* 条件を満たすという (なお, (1.3) の左辺は λ_j を u_j に対応する変数に, $X_a\mu_j$ を $\partial_a u_j$ に対応する変数に代入したという意味である).

null 形式を

$$Q_0(\varphi,\psi)=(\partial_t\varphi)(\partial_t\psi)-\sum_{k=1}^{3}(\partial_k\varphi)(\partial_k\psi), \tag{1.4}$$

$$Q_{ab}(\varphi,\psi)=(\partial_a\varphi)(\partial_b\psi)-(\partial_b\varphi)(\partial_a\psi),\ 0\le a<b\le 3, \tag{1.5}$$

と定義すると, $F=(F_i)_{1\le i\le N}$ が null 条件を満たすならば, 各 $F_i^{(2)}$ は $Q_0(u_j,u_k)$ と $Q_{ab}(u_j,u_k)$ (ここで $1\le j,k\le N$, $0\le a,b\le 3$) の一次結合になることが分かる.

null 条件を仮定すると, 十分小さい初期値に対しては (1.1) は大域解を持つことが知られている (Klainerman '86, Christodoulou '86).

Klainerman の手法はベクトル場の方法と呼ばれるもので, ベクトル場

$$S=t\partial_t+\sum_{j=1}^{3}x_j\partial_j,$$
$$L_j=t\partial_j+x_j\partial_t\ (j=1,2,3),\ \Omega_{jk}=x_j\partial_k-x_k\partial_j\ (1\le j<k\le 3)$$

を用いて, 波動方程式の解の減衰評価と, null 形式の (一般の 2 次の項よりも) 速い減衰評価を得るものである.

(2) 非線形 Klein–Gordon 方程式 (すなわち $m_i>0$, $i=1,2,\dots,N$) の場合: この場合は, 特別な付加条件は必要ない. 一般に 2 次のオーダーの非線形項を持つ場合に, 小さい初期値に対しては (1.1) は大域解を持つことが知られている (Klainerman '85, Shatah '85). Klainerman はやはりベクトル場の方法を用いたが, 上記のうち S は Klein–Gordon 方程式には用いることができないことに注意しておく.

(3) 非線形波動方程式と Klein–Gordon 方程式の連立系 (すなわち, ある K がとれて $m_i>0$ $(1\le i\le K)$, $m_i=0$ $(K+1\le i\le N)$) の場合: (1.3) が任意の $\lambda,\mu\in\mathbb{R}^N$ と, (必ずしも $X_0^2-X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$ を満たさない) 任意の $X=(X_a)_{0\le a\le 3}$ に対して成り立つ場合, F は強 null 条件を満たすという. 質量 m_i に正のものと 0 のものの双方がある場合にも強 null 条件の下では小さな初期値に対して, (1.1) は大域解を持つ (Georgiev '90).

強 null 条件を満たすとき, 各 $F_i^{(2)}$ は $Q_{ab}(u_j,u_k)$ (ここで $1 \le j,k \le N$, $0 \le a,b \le 3$) の一次結合の形であることが分かる. 波動方程式と Klein–Gordon 方程式の双方を含むシステムに対してはベクトル場 S を用いることができないため, 早い減衰を持つことを示すために (Klainerman の手法では) S を用いる必要があった null 形式 Q_0 が排除されている.

この結果は (1), (2) のいずれの場合の結果も自然な形では含んでおらず, 不満が残る. (3) の場合の結果を改良することが本講演の目的である.

2 主結果

$$m_i > 0\ (1 \le i \le K), \quad m_i = 0\ (K+1 \le i \le N) \tag{2.1}$$

と仮定する.

$$v_i = u_i\ (1 \le i \le K), \quad w_i = u_{i+K}\ (1 \le i \le L = N-K) \tag{2.2}$$

とし, $v = (v_j)_{1 \le j \le K}$, $w = (w_j)_{1 \le j \le L}$ とする. 言い方を変えると,

$$u = (u_1, \dots, u_K, u_{K+1}, \dots, u_N) = (v_1, \dots, v_K, w_1, \dots, w_L) = (v, w)$$

とする. $1 \le i \le N$ に対して

$$F_i^W(w, \partial w) = F_i^{(2)}\big((0,w),(0,\partial w)\big), \tag{2.3}$$

$$F_i^K(v, \partial v) = F_i^{(2)}\big((v,0),(\partial v,0)\big), \tag{2.4}$$

$$F_i^{KW}(u, \partial u) = F_i^{(2)}(u, \partial u) - F_i^W(w, \partial w) - F_i^K(v, \partial v) \tag{2.5}$$

と定義する.

定理 2.1 次の 2 条件を仮定する*:*

- $F^W = (F_i^W)_{1 \le i \le N}$ が $((w, \partial w)$ の関数として) *null* 条件を満たす*.*
- $F^{KW} = (F_i^{KW})_{1 \le i \le N}$ が w には陽に依存しない*,* すなわち

$$F^{KW}(u, \partial u) = F^{KW}\big((v,0),(\partial v, \partial w)\big). \tag{2.6}$$

このとき*,* 任意の $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^N)$ に対して*,* $\varepsilon_0 > 0$ が存在して*,* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ ならば (1.1) は大域解を持つ*.*

3　証明に用いる評価式

$$Z = \bigl((L_j)_{1\le j\le 3}, (\Omega_{jk})_{1\le j<k\le 3}, (\partial_a)_{0\le a\le 3}\bigr),\ \widetilde{Z} = \bigl((\Omega_{jk})_{1\le j<k\le 3}, (\partial_a)_{0\le a\le 3}\bigr)$$

とおく.

　また $\mathcal{W}(t,x) = \min\{\langle x\rangle, \langle t-|x|\rangle\}$, $\mathcal{L}(t,x) = \log\bigl(2 + \langle t+|x|\rangle\langle t-|x|\rangle^{-1}\bigr)$ と定義する. ここで $\langle a\rangle = \sqrt{1+|a|^2}$ である.

補題 3.1 (Asakura '86) φ が $\Box\varphi(t,x) = 0$, $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^3$ をみたすとき,

$$\langle t+|x|\rangle\langle t-|x|\rangle|\varphi(t,x)| \le C\sup_{y\in\mathbb{R}^3}\sum_{|\alpha|\le 1}\langle y\rangle^3|(\partial^\alpha\varphi)(0,y)|, (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^3.$$

ここで C は T とは独立な定数である.

補題 3.2 (Kubota–Yokoyama '01) φ を

$$\begin{cases}\Box\varphi(t,x) = \Phi(t,x), & (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^3,\\ \varphi(0,x) = (\partial_t\varphi)(0,x) = 0, & x\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

の解とする. $\mu>0$, $\lambda\ge 0$ に対し, μ のみに依存する定数 $C>0$ が存在して,

$$\begin{aligned}&\langle t+|x|\rangle^{-\lambda}\langle t+|x|\rangle\mathcal{L}(t,x)^{-1}|\varphi(t,x)|\\ &\qquad\le C\sup_{(\tau,y)\in[0,t]\times\mathbb{R}^3}|y|\langle\tau+|y|\rangle^{1+\mu-\lambda}\mathcal{W}(\tau,y)^{1-\mu}|\Phi(\tau,y)|,\\ &\langle t+|x|\rangle^{-\lambda}\langle x\rangle\langle t-|x|\rangle|\partial\varphi(t,x)|\\ &\qquad\le C\sup_{(\tau,y)\in[0,t]\times\mathbb{R}^3}|y|\langle\tau+|y|\rangle^{1+\mu-\lambda}\mathcal{W}(\tau,y)^{1-\mu}\sum_{|\alpha|\le 1}\left|\widetilde{Z}^\alpha\Phi(\tau,y)\right|\end{aligned}$$

が $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3$ に対して成立する.

補題 3.3 (Klainerman '87) $\mathbb{R}^3$ 上の滑らかな関数 v に対して,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\langle x\rangle|v(x)| \le C\sum_{|\alpha|+|\beta|\le 2}\|\partial_x^\alpha\Omega^\beta v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.1}$$

χ_j $(j \geq 0)$ を $C_0^\infty(\mathbb{R})$ に属する非負の関数で

$$\sum_{j=0}^{\infty} \chi_j(s) = 1 \quad (s \geq 0), \tag{3.2}$$

$$\operatorname{supp} \chi_j = [2^{j-1}, 2^{j+1}] \ (j \geq 1), \ \operatorname{supp} \chi_0 \cap [0, \infty) = [0, 2] \tag{3.3}$$

を満たすものとする.

補題 3.4 (Hörmander '87, Georgiev '92) $m > 0$ とし, v は

$$(\Box + m^2) v(t,x) = \Phi(t,x), \ (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \tag{3.4}$$

を満たすものとする. このとき

$$\begin{aligned} &\langle t + |x| \rangle^{3/2} |v(t,x)| \\ &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha| \leq 4} \sup_{\tau \in (0,t)} \| \chi_j(\tau) \langle \tau + |\cdot| \rangle Z^\alpha \Phi(\tau, \cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad + C \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha| \leq 5} \| \langle \cdot \rangle^{3/2} \chi_j(|\cdot|) (Z^\alpha v)(0, \cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

が成立する.

$\partial_r = \sum_{j=1}^{3} (x_j/|x|) \partial_j$, $\partial_\pm = \partial_t \pm \partial_r$ とおく. null 形式の評価には ∂_+ が深く関わっている. このことは, 例えば (x に関して) 球対称の φ, ψ に対しては,

$$2Q_0(\varphi, \psi) = (\partial_+ \varphi)(\partial_- \psi) + (\partial_- \varphi)(\partial_+ \psi)$$

と書けることからも想像できるであろう. Klainerman は $\partial_+ = (t+r)^{-1}(S + L_r)$ という書き換えを行うことにより null 形式から速い減衰が期待できることを示した. ここで $L_r = \sum_{j=1}^{3} (x_j/|x|) L_j$ である. 伝播速度が異なる波動方程式系では L_j を用いることができないため, $\partial_+ = r^{-1}(S - (t-r)\partial_t)$ という書き換えが広く用いられていた. なお, ∂_+ を書き換えるのではなく, 波動方程式の解のこの方向の微分が早く減衰することを直接評価する (この場合, $\widetilde{Z}$ に属するベクトル場のみを用いる) という方法も最近になり開発されている (Katayama–Kubo '08). 今回は, S は使えないが, L_j を用いることができるので

$$(t+r)\partial_+ = 2L_r + (t-r)(\partial_t - \partial_r) \tag{3.6}$$

という書き換えを用いることにより null 形式の評価を行った.