非線型分散型方程式の散乱の逆問題

佐々木 浩宣　（大阪大学大学院理学研究科）

3 次元非線型 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u + \Delta u + Q_0 \frac{\exp(-\mu_0 r)}{r} u - Q_1 \left(\frac{\exp(-\mu_1 r)}{r} * |u|^2 \right) u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3. \quad \text{(NLS)}$$

の逆散乱問題について考察する. 但し, ここで $r = |x|$, $Q_0, Q_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_0, \mu_1 > 0$ とし, $*$ は空間変数に関する合成積を表す.

方程式 (NLS) は [3] 等で想定された非相対論的 Debye 遮蔽モデルハミルトニアン

$$H(x^1, x^2, \cdots, x^N) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \Delta_j - \sum_{j=1}^{N} \frac{Z}{r_j} \exp(-\mu_0 r_j) + \sum_{j>k}^{N} \frac{1}{r_{jk}} \exp(-\mu_1 r_{jk})$$

に由来する. ここで $x_j \in \mathbb{R}^3$ は j 番目の粒子の位置, $r_j = |x_j|$, $r_{jk} = |x_j - x_k|$, Z は原子価であり, μ_j はプラズマの状態を表すパラメータで, 逆数 $1/\mu_j$ は Debye 半径（もしくは Debye 遮蔽指数）と呼ばれる.

ここで言う逆散乱問題とは, 摂動項付き方程式に関する散乱データを用いて, 未知なる摂動項を同定する逆問題の一種である. 非線型シュレディンガー方程式の逆散乱問題の既知なる結果については, [7, 9, 8, 5] などを参照されたい.

本研究の目的は (NLS) の散乱データを基にパラメータ Q_j, μ_j, $j = 0, 1$, を決定することである.

先ず順問題, 即ち散乱作用素の存在に関する定理を挙げる.

定理 1.　Q_0, μ_0 は

$$|Q_0| < \mu_0 \tag{1}$$

を満たすものとする. このとき十分小さい $\phi_- \in L^2$ に関して, (NLS) の一意な解 $u \in C(\mathbb{R}; L^2) \cap L^3(\mathbb{R}; L^{18/7})$ とデータ $\phi_+ \in L^2$ が存在し,

$$\lim_{t \to \pm\infty} \| u(t) - e^{it\Delta} \phi_\pm \|_2 = 0$$

を満たす. さらに散乱作用素 $S : \phi_- \mapsto \phi_+$ が定義される.

以下, 散乱データ $(\phi_-, S(\phi_-))$ を用いて Q_j, μ_j を決定しよう. 但し予め (1) を仮定しておく. 指数 Q_0, μ_0 は [2] と全く同様にして決定され, 従って自己共役作用素 $H = -\Delta - Q_0 e^{-\mu_0 r}/r$ に関する波動作用素

$$\Omega_\pm := s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{-it\Delta} e^{-itH} P_{ac}(H)$$

が決定される. $P_{ac}(H)$ は H の絶対連続部分への射影作用素であり, (1) の下では恒等射に等しい. 残る指数 Q_1, μ_1 に関しては既存の手法では決定出来ない為, 新たなアプローチを試みる必要がある. 今回, 以下の公式を得た:

定理 2. **([6])** (1) を仮定する. 関数 $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ は, $\phi \neq 0$ 且つ $(\Delta^2+1)^{-1}\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ を満たすものとする. このとき Q_1, μ_1 が次の手順で決定される：
(Step I) 先ず,

$$\frac{Q_1}{\mu_1^2} = \frac{\lim_{\lambda\to\infty} i\lambda^4 \left\langle (\Omega_+ S\Omega_-^* - id)(\lambda^{-3}\phi_\lambda), \phi_\lambda \right\rangle_{L^2}}{4\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left| e^{it\Delta}\phi(x) \right|^4 dxdt} \tag{2}$$

を得る. 但し, Ω_-^* は Ω_- の共役作用素であり, $\phi_\lambda(x) := \phi(\lambda^{-1}x)$ とする.
(Step II) (2) で得られた Q_1/μ_1^2 を用いて,

$$\begin{aligned}
b &= \left|\frac{Q_1}{\mu_1^2}\right|^{1/2}, \qquad H(b) = -\Delta - bQ_0\frac{\exp(-b\mu_0 r)}{r},\\
\Psi_1(\alpha) &= \alpha \int_{\mathbb{R}} \left\langle \frac{\exp(-\sqrt{|\alpha|}r)}{r} * \left|e^{-itH(b)}\phi\right|^2, \left|e^{-itH(b)}\phi\right|^2 \right\rangle_{L^2} dt, \quad \alpha \in \mathbb{R},\\
a &= \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon^{-3} b^{-7} \left\langle (\Omega_+ S\Omega_-^* - id)(\varepsilon\phi_b), \phi_b \right\rangle,\\
m_0 &= \max\left\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; \Psi_1(m) \leq |a|\right\},\\
q_1 &= \max\left\{q = 0,1; \Psi_1\left(m_0 + \frac{q}{2}\right) \leq |a|\right\},\\
q_{j+1} &= \max\left\{q = 0,1; \Psi_1\left(m_0 + \sum_{k=1}^{j} \frac{q_k}{2^k} + \frac{q}{2^{j+1}}\right) \leq |a|\right\}, \quad j = 1,2,\cdots
\end{aligned}$$

を定義する. このとき,

$$Q_1 = \mathrm{sign}\left(\frac{Q_1}{\mu_1^2}\right)\left(m_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{2^j}\right). \tag{3}$$

を得る.

証明の概略 先ず (Step 1) を証明する. 順問題の結果より

$$\begin{aligned}
&i\lambda^4 \left\langle (\Omega_+ S_C \Omega_-^* - id)(\lambda^{-3}\phi_\lambda), \phi_\lambda \right\rangle\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} V_1(y) \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left|e^{-itH(\lambda,y)}(\tau_{\lambda^{-1}y}\phi)(x)\right|^2 \left|e^{-itH(\lambda,y)}\phi(x)\right|^2 dxdt \right) dy + O(\lambda^{-7/2})\\
&\left(=: \int_{\mathbb{R}^3} V_1(y)\Phi^\lambda(y)dy + O(\lambda^{-7/2}) \right)
\end{aligned}$$

を得る. 但し, ここで

$$H(\lambda,y)\psi(x) := -\Delta_x\psi(x) + \lambda^2 V_0(\lambda x - y)\psi(x),$$
$$\tau_z\psi(x) := \psi(x-z).$$

よって $\Phi^\lambda(y) \to \displaystyle\int\int |e^{it\Delta}\phi|^4 dxdt$ を示せばよい. この為には以下の命題を示せば充分である:

> **命題**　任意の $t \in \mathbb{R}$ について次が成立する:
>
> (I) 任意の $y \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\lim_{\lambda\to\infty} e^{-itH(\lambda,y)}\phi = e^{it\Delta}\phi$ が成り立つ.
>
> (II) 或る定数 C が存在して, $\|e^{itH(\lambda)}\phi\|_6 \le C(1+|t|)^{-1}$ が成り立つ.

(I) については強レゾルベント収束の議論を応用すれば得られる.　この際, $(i\pm\Delta)^{-1}\phi$ の台と原点との距離が正数となることが重要である. (II) の証明については [4] による線型シュレディンガー方程式の解の減衰評価等が有用である.

(Step 2) は Ψ が狭義単調増加, 連続かつ全射であるので結論を得る.

注　上記主定理の手法は相対論的方程式

$$i\partial_t w - \sqrt{1-\Delta}w = Q_2\left(\frac{\exp(-\mu_2 r)}{r} * |w|^2\right)w \quad \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3. \tag{SRH}$$

にも適用できる. 即ち, 未知パラメータ $Q_2 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 > 0$ を決定する公式を得る. (散乱作用素の存在定理については [1] を参照されたい.)

参考文献

[1] Y. Cho and T. Ozawa, On the semirelativistic Hartree-type equation, *SIAM J. Math. Anal.* **38** (2006), 1060–1074.

[2] V. Enss and R. Weder, The geometrical approach to multidimensional inverse scattering, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 3902–3921.

[3] P. Mukherjee, J. Karwowski and G. Diercksen, *Chem. Phys. Lett.* **363** (2002), 323–327.

[4] I. Rodnianski and W. Schlag, Time decay for solutions of Schrodinger equations with rough and time-dependent potentials, *Invent. math.* **155** (2004), 451–514.

[5] H. Sasaki, The inverse scattering problem for Schrödinger and Klein-Gordon equations with a nonlocal nonlinearity, *Nonlinear Anal. Theory, Methods & Applications* **66** (2007), 1770–1781.

[6] H. Sasaki, Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with the Yukawa potential, *Comm. Partial Diff. Equations* **33** (2008), 1175–1197.

[7] W. A. Strauss, Non linear scattering theory, in *"Scattering Theory in Mathematical Physics"*, pp. 53–78. J. A. Lavita and J.-P. Marchand, editors, D. Reidel, Dordrecht-Holland / Boston 1974.

[8] M. Watanabe, Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with cubic convolution nonlinearity, *Tokyo J. Math.* **24** (2001), 59-67.

[9] R. Weder, Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation, *Comm. Partial Differential Equations* **22** (1997), 2089–2103 .