コンパクト多様体上での非線形楕円型方程式の分岐構造

壁谷　喜継 (大阪府立大・工)

この講演の内容は，二宮広和氏（龍谷大学理工学部），C. Banlde（Universität Basel）氏との共同研究 ([1]) に基づく．

始めに一般論を少し展開し，具体例を後から述べる．一般に，ここでは x_{n+1} を回転軸とする回転対称な領域での非線形楕円型方程式

$$\Delta_M u + \lambda(-u + |u|^{p-1}u) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset M \tag{1}$$

の解を Dirichlet 条件の下で考える．ここに，$M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ は　x_{n+1} 軸を回転軸とする境界のない滑らかな $n(n \geq 3)$ 次元多様体で次のような座標表現をもつ． 関数 $f(t)$ （この関数は $[-1,1]$ で定義された関数で，$f(-1) = f(1) = 0$，$f(t) > 0$ $(t \in (-1,1))$ かつ $(-1,1)$ で解析的であるとする）を用いると，M 上の点 $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \in M$ は

$$\begin{cases} y_1 = f(\cos\theta_1)\cos\theta_2, \\ y_k = f(\cos\theta_1)\Big(\displaystyle\prod_{j=2}^{k}\sin\theta_j\Big)\cos\theta_{k+1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n-2, \\ y_{n-1} = f(\cos\theta_1)\Big(\displaystyle\prod_{j=2}^{n-1}\sin\theta_j\Big)\cos\phi, \\ y_n = f(\cos\theta_1)\Big(\displaystyle\prod_{j=2}^{n-1}\sin\theta_j\Big)\sin\phi, \\ y_{n+1} = \cos\theta_1. \end{cases}$$

と表される．この場合，x_{n+1} 軸からの距離 ρ は,

$$\rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} = f(\cos\theta_1)$$

となる．Δ_M は M 上の Laplace-Beltrami 作用素，$p > 1, \lambda > 0$，$\Omega \subset M$ は北極 $(0, \ldots, 0, 1)$ から測り，$\varepsilon > 0$ を小さい数として,「緯度」が $\pi - \varepsilon$ 　未満の領域である．即ち，$\theta_1 \in [0, \pi - \varepsilon]$, $\theta_i \in [0, \pi]$ $(i = 2, \ldots, n-1)$, $\phi \in [0, 2\pi]$ であるとする．なお，簡単な具体例は $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ の時

であり，このとき M は単位球面である．簡単のため，$n=3$ の場合で Laplace-Beltrami 作用素 Δ_M を表現してみると

$$\Delta_M u = \frac{1}{\sqrt{\det G}}\partial_j(g^{jk}\sqrt{\det G}\partial_k u),$$

となる（$G=(g_{ij})$， $G^{-1}=(g^{jk})$）．この場合，

$$\det G = (f(\cos\theta_1))^2\sqrt{(f'(\cos\theta_1))^2+1}\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{1}{\{(f'(\cos\theta_1))^2+1\}\sin^2\theta_1}, \quad g^{22} = \frac{1}{(f(\cos\theta_1))^2}, \\ g^{33} &= \frac{1}{(f(\cos\theta_1))^2\sin^2\theta_2} \end{aligned}$$

である（$g^{ij}=0$ if $i\neq j$）．もし u が θ_1 のみの関数なら

$$\begin{aligned} &\Lambda_{\mathrm{az}}u := \Delta_M u \\ &= \frac{1}{(f(\cos\theta_1))^2\sqrt{(f'(\cos\theta_1))^2+1}\sin\theta_1}\Big(\frac{(f(\cos\theta_1))^2}{\sqrt{(f'(\cos\theta_1))^2+1}\sin\theta_1}u_{\theta_1}\Big)_{\theta_1} \end{aligned}$$

となる．$M=\mathbb{S}^n$ の時には，緯度のみに依存するラプラシアンは

$$\Lambda_{\mathrm{az}}u = \frac{1}{\sin^{n-1}\theta_1}\frac{d}{d\theta_1}((\sin^{n-1}\theta_1)\frac{du}{d\theta_1})$$

と表現できる．このとき，Prüfer の比較定理（[2] 参照）を用いれば，固有値問題

$$\Lambda_{\mathrm{az}}u + \lambda u = 0, \quad \theta_1 \in (0,\pi-\varepsilon), \quad u(\pi-\varepsilon)=0 \tag{2}$$

は，可算個の固有値 $\{\lambda_{j,\varepsilon}^D\}$ を持つことが分かり，さらにこの固有値は $\varepsilon\downarrow 0$ のとき，M 全体での　Neumann 問題の固有値 λ_j に近づく．このことから，次のことがわかる．なお，球面の時には，Legendre の陪函数を用いて固有関数が表現でき，より詳しいことが分かるが，一般論としても以下は分かる．

Theorem 1 $n=3$ とし $p>1$ とする． すると $\varepsilon>0$ が十分 0 に近ければ，各 $j\geq 2$ に対して，ある $\alpha_*>0$ (1 に十分近い) と，ある λ (λ_j に十分近い) があって，(1) は $u(0)=\alpha_*$ なる， $\theta_1=\pi-\varepsilon$ の近傍で「境界層」をなすような解を持つ．

参考文献

[1] C. Bandle, Y. Kabeya and H. Ninomiya, Preprint.

[2] 吉田耕作,『微分方程式の解法　第２版』，岩波書店.