ある放物型-楕円型方程式系の無限時刻爆発解について

仙葉 隆（九州工大・工）

1 序

本講演では、以下の放物型-楕円型方程式系の解について述べる。

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) & \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0, \infty), \\ 0 = \Delta v + u & \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0 & \text{in } \mathbf{R}^2. \end{cases} \tag{1.1}$$

この系は、いわゆる Keller-Segel 系を単純化した方程式系として導出された。Keller-Segel 系は餌がなくなった状態の細胞性粘菌が集合体を形成するために集まってくる現象を記述するモデル方程式として Keller と Segel [7] によって導出された。 ここで、$u(x,t)$ は細胞性粘菌の密度に対応し、$v(x,t)$ はある化学物質の濃度に対応しており、その化学物質は細胞性粘菌の（集まる）動きを誘発する。

“集まる” という現象は細胞性粘菌の密度が空間局所的に大きくなることを意味する。(1.1) の爆発解はこれに対応する挙動を示す。つまり、爆発解は爆発点にある一定量の u の L^1 ノルムが集中し、結果的に爆発時刻で爆発点にデルタ関数が現れる。

2 知られている結果

最初に以下の方程式系の解について知られている結果を述べる。

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ 0 = \Delta v - v + u & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

ここで、Ω は $\mathbf{R}^2$ の有界領域で、u_0 は非負でなめらかな関数とする。$\nu = \nu(x)$ $(x \in \partial\Omega)$ は境界上の外向き単位法線ベクトルを表す。

このとき、以下が成り立つ。

$$\lambda \equiv \int_\Omega u(x,t)dx = \int_\Omega u(x,0)dx \quad \text{for } t \in (0, T_{max}). \tag{2.3}$$

ここで、T_{max} は古典解の最大存在時刻を表す。

$\lambda \in (0, 4\pi)$、又は解（や領域）が原点対称で $\lambda \in (0, 8\pi)$ のとき、解 (u, v) は時間大域的に存在し、有界であることが分かる。この結果は原点対称の場合に永井 [8] によって得られた。[9] では Keller-Segel 系の解に対して対称性を仮定しない場合の結果が得られており、同様の手法で (2.2) の解について同様の結果が得られる。また、$\Omega = \mathbf{R}^2$ の場合も初期関数を

$$(1 + |x|^2)u(x, 0) \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2), \tag{2.4}$$

であるクラスを考えたとき、[5, 4] によって $\lambda < 8\pi$ ならば (1.1) の解が時間大域的に存在し有界である事が示されている。

ここで、(2.4) が成り立つとき

$$\lambda = \int_{\mathbf{R}^2} u(x, t)dx = \int_{\mathbf{R}^2} u_0(x)dx \quad \text{for } t \in (0, T_{max}) \tag{2.5}$$

が成り立つことが分かる。

解の爆発に関しては

$$\int_\Omega u_0(x)dx > 8\pi \ \text{ and } \ \int_\Omega |x - q|^2 u_0(x)dx \ll 1 \text{ for some } q \in \Omega,$$

または

$$\int_\Omega u_0(x)dx > 4\pi \ \text{ and } \ \int_\Omega |x - q|^2 u_0(x)dx \ll 1 \text{ for some } q \in \partial\Omega$$

であるとき、(2.2) の解が有限時刻爆発をする事が知られている。

ここで、解 (u, v) が爆発するとは, ある $T \in (0, \infty]$ に対して $\lim_{n\to\infty} t_n = T$、$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |u(x, t_n)| = \infty$ を満たす列 $\{t_n\}_{n\geq1} \subset (0, T)$ がある事を言う。さらに、$T \in (0, \infty)$ のとき有限時刻爆発と言い、$T = \infty$ のとき無限時刻爆発と言う。

また、もし (2.2) の解が T_{max} で有限時刻爆発するならば以下が成り立つ [10]。

$$u(\cdot, t) \to \sum_{q\in\mathcal{B}} m(q)\delta_q + f \quad \text{in } \mathcal{M}(\overline{\Omega}) \quad \text{as } t \to T_{max}. \tag{2.6}$$

ここで、$\mathcal{B}$ は爆発点の集合、

$$m(q) \geq \begin{cases} 8\pi & \text{if } q \in \Omega, \\ 4\pi & \text{if } q \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

δ_q は点 q にサポートを持つデルタ関数、f は非負 L^1 関数、$\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ は $\overline{\Omega}$ 上のラドン測度全体である。また、[11] において (2.7) の "$\geq$" が "$=$" であることが示された。

(2.6), (2.7) より、爆発点の個数は $\lambda/4\pi$ 以下であることが分かる。そして、原点対称の場合は爆発点は原点にしか現れない事がわかり、その事から $\lambda < 8\pi$ のとき爆発しないことがわかる。

以上の結果は初期値が空間無限遠方（$|x| \to \infty$）で十分速く 0 になるような解のクラスを考えれば領域が $\mathbf{R}^2$ の場合も同様の結果が得られると考えられし、実際前述した事も含めていくつかの結果が出ている。

λ が閾値の場合については (1.1) の解について以下の事が知られている。領域が $\mathbf{R}^2$ なのでこの場合の閾値は 8π である。

P. Biler, G. Karch and P. Laurençot and T. Nadzieja [1, 2] は、$\lambda = 8\pi$ を満たす (1.1) の原点対称な時間大域的解の存在を示した。また、A. Blanchet, J. Carrillo and N. Masmoudi [3] は、任意の $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ を満たす列に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}^2} u(x, t_n) = \infty$$

を満たす (1.1) の無限時刻爆発解の存在を示した。

3 主結果

我々が得られた結果を説明するために以下の関数を導入する。$\theta \in (0, 1)$, $K > 0$ に対して、$E(t) = E(t; K)$ と $R(t) = R(t; K, \theta)$ を以下の関数とする。

$$E(t) = E(t; K) = \frac{\sqrt{K}}{\log(t+1)} \sqrt{1 - \frac{4\log(\log(t+1))}{\log(t+1)}}, \tag{3.8}$$

$$R(t; K, \theta) = \frac{1}{2}(t+1)^{(1-\theta)/2} E(t; K)^{\theta}.$$

また、集合 $\mathcal{O} \subset [0, \infty)$ に対して、関数 $\chi_{\mathcal{O}}(y)$ を以下のように定義する

$$\chi_{\mathcal{O}}(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in \mathcal{O}, \\ 0 & \text{if } y \notin \mathcal{O}. \end{cases}$$

このとき、以下が成り立つ。

Theorem 1 ある定数 $C>0$、$K>0$, $T>0$、$\theta\in(0,1)$ に対して以下の *(i), (ii), (iii), (iv)* が成り立つような原点対称で時間大域的な *(1.1)* の (u,v) がある。

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad x\cdot\nabla u(x,t)\le 0 \quad \textit{in } \mathbf{R}^2\times(0,\infty) \qquad \textit{and} \qquad u>0 \quad \textit{in } \mathbf{R}^2\times(0,\infty).\\
&(ii) \quad \int_{\mathbf{R}^2} u(x,t)dx = 8\pi \qquad \textit{for } t\in[0,\infty).\\
&(iii) \quad u(x,t)\le \frac{C}{(t+T+1)|x|^2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{8(t+T+1)}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{for } x\in\mathbf{R}^2 \quad \textit{with } |x|\ge\sqrt{t+T+1} \textit{ and } t\ge 0.\\
&(iv) \quad \left|u(x,t)-\frac{8}{E(t+T;K)^2}\left\{1+\left(\frac{|x|}{E(t+T;K)}\right)^2\right\}^{-2}\right|\\
&\quad \le \frac{C}{(t+T+1)^{-1}}\left\{1+\left(\frac{|x|}{E(t+T;K)}\right)^2\right\}^{-1}\\
&\qquad +C\left(\chi_{[0,R(t+T;K,\theta))}(|x|)+\frac{\chi_{[R(t+T;K,\theta),\infty)(|x|)}}{E(t+T;K)}\right)\\
&\qquad\quad \cdot\Big(\frac{1}{E(t+T;K)}\left\{1+\left(\frac{|x|}{E(t+T;K)}\right)^2\right\}^{-2}\\
&\qquad\quad +\frac{E(t+T;K)^3}{|x|^4}\left|\log\left(1+\left(\frac{|x|}{E(t+T;K)}\right)^2\right)\right|\chi_{[E(t+T;K),\infty)}(|x|)\Big)
\end{aligned}
$$

for $x\in\mathbf{R}^2$ *with* $|x|\le\sqrt{t+T+1}$ *and* $t\ge 0$.

Theorem 1 から以下の事が分かる。

Theorem 2 *Theorem 1* で述べた解 (u,v) は

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{\|u(\cdot,t)\|_\infty}{(\log t)^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{u(0,t)}{(\log t)^2}=\frac{8}{K},
$$

$$
\lim_{t\to\infty}\sup_{|x|\ge\sqrt{K}/(\log t)}u(x,t)=0, \quad \lim_{t\to\infty}\int_{|x|\ge K/(\log t)^2}u(x,t)dx=0,
$$

$$
u(\cdot,t)\to 8\pi\delta_0 \quad \textit{in } \mathcal{M}(\mathbf{R}^2) \quad \textit{as } t\to\infty
$$

を満たす。ただし、K は *Theorem 1* の定数である。

参考文献

[1] P. Biler, G. Karch and P. Laurençot and T. Nadzieja,The 8π-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in a disc, Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. 27 (2006), 133-147.

[2] P. Biler, G. Karch and P. Laurençot and T. Nadzieja, The 8π-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane. Math. Methods Appl. Sci., Vol. 29 (2006), 1563-1583.

[3] A. Blanchet, J. Carrillo and N. Masmoudi, Infinite time aggregation for the critical Patlak-Keller-Segel model in $\mathbf{R}^2$, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 61 (2008), 1-33.

[4] A. Blanchet, J. Dolbeault and B. Perthame, Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. Electron. J. Differential Equations, No. 44 (2006), 1-32 (electronic).

[5] J. Dolbeault and C. Schmeiser, Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in $\mathbf{R}^2$, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Vol. 339 (2004), 611-616.

[6] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, Singularity patterns in a chemotaxis model. Math. Ann., Vol. 306 (1996), 583-623.

[7] E.F. Keller, and L.A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, J. Theor. Biol., Vol. 26 (1970), 399-415.

[8] T. Nagai, Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system, Adv. Math. Sci. Appl., Vol. 5 (1995), 581-601.

[9] T. Nagai, T. Senba, and K. Yoshida, Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis, Funckcial. Ekvac., Vol 40 (1997), 411-433.

[10] T. Senba and T. Suzuki, Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic system of mathematical biology, Advances in Differential Equations, Vol. 6 (2001), 21-50.

[11] T. Suzuki, Free energy and self-interacting particles. Progress in Non-linear Differential Equations and Their Applications, 62. Birkhauser, Boston, 2005.