ある反応拡散系の角遷移層における漸近解の構成

飯田 雅人（宮崎大学工学部）
iida@cc.miyazaki-u.ac.jp

1　序

この講演内容は，中島主恵（東京海洋大学）・柳田英二（東京工業大学）の両氏との共同研究に基づく．

互いに競争関係にある２種類の生物集団（個体群）の空間的棲み分けの機構を暗示する数理モデルとして Lotka-Volterra 型２種競争拡散系を考察する：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (a-u)u - bMuv, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v + (d-v)v - cMuv. \end{cases} \tag{1}$$

ここに，$(u(x,t;M), v(x,t;M))$ は，互いに競争関係にある２種の個体群密度を表し，a,b,c,d,D は正の定数である．また，正のパラメータ M は十分大きいものとする：そのように設定すると，２種間の競争が激しいため，局所的な共存が成立しにくく，２種の空間的棲み分けが起こりやすくなるものと期待される．実際，Dancer-Hilhorst-Mimura-Peletier [1] は，適当な初期・境界条件のもとで，$M\to\infty$ の特異極限において，$u(\cdot,t;\infty)$ の台と $v(\cdot,t;\infty)$ の台が分離され，$(u(\cdot,\cdot;\infty), v(\cdot,\cdot;\infty))$ が２相自由境界問題の弱解になることを示した．特に，自由境界が滑らかな界面 $\Gamma(t)$ であるときは，$\Gamma(t)$ の両側での $u(\cdot,t;\infty)$ の値は $\Gamma(t)$ を越えて連続につながるが，$\Gamma(t)$ の両側での $u(\cdot,t;\infty)$ の勾配は $\Gamma(t)$ を越えて連続にはつながらない．つまり，$u(\cdot,t;\infty)$ のグラフには $\Gamma(t)$ に沿って角（かど）ができる．$v(\cdot,t;\infty)$ の形状も同様．一方，Nakashima-Wakasa [3] は，十分大きな M を固定したとき，u と v の初期分布が分離していなくても 極めて短時間のうちに $u(\cdot,t;M)$ と $v(\cdot,t;M)$ の "分離境界" が形成される（２種の棲み分けが始まる）ことを正当化した： $t=M^{-\frac{2}{3}}$ において，$u(\cdot,t;M)$ の分布と $v(\cdot,t;M)$ の分布が M によらない界面 Γ_0 によってほぼ分離されることを，"誤差 $O\left(M^{-\frac{1}{3}}\right)$ の範囲内で" 証明した．我々の目的は，十分大きな M に対して，"分離境界" が形成された後も当分の間は [1] において保証される界面 $\Gamma(t)$ の付近で $u(\cdot,t;M)$ の分布と $v(\cdot,t;M)$ の分布がほぼ分離され続けることを正当化し，その期間における解の漸近的な形状を明らかにすることである．そのための準備として，本講演では "分離境界"$\Gamma(t)$ の近傍に限定して解の漸近的な形状を解析 しておく．なお，舞台となる空間領域（x の範囲）Ω は N 次元領域であるが，込み入った議論を避けるため，"分離境界"$\Gamma(t)$ は Ω そのものの境界 $\partial\Omega$ から離れているものと仮定しておく.

2　角遷移層での形式的漸近展開

特異極限 $(u(\cdot,t;\infty), v(\cdot,t;\infty))$ の $\Gamma(t)$ での特異性（$(\nabla u(\cdot,t;\infty), \nabla v(\cdot,t;\infty))$ が不連続であること）は，M が十分大きい時，$(\nabla u(\cdot,t;M), \nabla v(\cdot,t;M))$ が $\Gamma(t)$ 付近で $\Gamma(t)$ の法線方向に急激に変化することを示唆する．それ故，界面 $\Gamma(t)$ の近傍（薄い層）は $(u(\cdot,t;M), v(\cdot,t;M))$ の**角遷移層**と呼ばれる．角遷移層における $(u(\cdot,t;M), v(\cdot,t;M))$ の漸近解を構成しよう．その

ため，$\Gamma(t)$ とともに動く観測者から見た局所座標系（角遷移層における局所動座標系）として (r,σ) を導入する： $r = r(x,t)$ は x から $\Gamma(t)$ への符号付き距離であり，$u(\cdot,t;\infty)$ の台の内部では $r<0$，$v(\cdot,t;\infty)$ の台の内部では $r>0$ とする；$\sigma = (\sigma_1(x,t), \sigma_2(x,t), \cdots, \sigma_{N-1}(x,t))$ は $N-1$ 次元曲面 $\Gamma(t)$ に沿った局所座標を表す．角遷移層内の r 方向（$\Gamma(t)$ に対して法線方向）に $(\nabla u(\cdot,t;M), \nabla v(\cdot,t;M))$ が急激に変化する様子を詳細に観察したいので，十分小さな正のパラメータ $\varepsilon = \varepsilon(M)$ を用いて r を ε^{-1} 倍に拡大した変数 $\rho = \dfrac{r}{\epsilon}$ を導入し，角遷移層における (u,v) を (ρ,σ,t) の関数として ε の形式的な冪級数として漸近展開しておく：

$$\begin{cases} u(x,t;M) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j U_j(\rho,\sigma,t), \\ v(x,t;M) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j V_j(\rho,\sigma,t) \end{cases} \tag{2}$$

ここで，r を ε^{-1} 倍に拡大することがちょうど良いリスケーリングになるように（即ち，展開右辺の係数 (U_j,V_j) の変動が大きすぎたり小さすぎたりしないように）パラメータ $\varepsilon(M)$ を適当に調節するには，$\varepsilon = M^{-\frac{1}{3}}$ 即ち $M=\varepsilon^{-3}$ としておけばよいことが，形式的な漸近展開論（**接合漸近展開法**）からわかる．このとき，ε は角遷移層の実質的な厚みを反映するパラメータだと思ってよい．実際には，(2) を代入した (1) の両辺を ε の冪級数として漸近展開し，ε の各冪について両辺の係数が相殺するように (U_0,V_0), (U_1,V_1), (U_2,V_2), ··· を決めていき，ρ 方向の "無限遠方" においてこの漸近展開が角遷移層の外部と滑らかに接合されることを考慮すると，

$$U_0 \equiv V_0 \equiv 0 \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial \rho^2} - bU_1V_1 = 0, & -\infty < \rho < +\infty, \\ D\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial \rho^2} - cU_1V_1 = 0, & -\infty < \rho < +\infty, \\ U_1 > 0, \quad V_1 > 0, & -\infty < \rho < +\infty, \\ (U_1,V_1) \approx (\alpha_0^- + \alpha_1^-\rho,\, 0) & \text{at } \rho = -\infty, \\ (U_1,V_1) \approx (0,\, \alpha_0^+ + \alpha_1^+\rho) & \text{at } \rho = +\infty \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_2}{\partial \rho^2} - b(V_1U_2 + U_1V_2) = \gamma^- \dfrac{\partial U_1}{\partial \rho}, & \rho \in (-\infty,+\infty), \\ D\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial \rho^2} - c(V_1U_2 + U_1V_2) = \gamma^+ \dfrac{\partial V_1}{\partial \rho}, & \rho \in (-\infty,+\infty), \\ (U_2,\, V_2) \approx \left(\beta_0^- + \beta_1^-\rho + \beta_2^-\dfrac{\rho^2}{2},\, 0\right) & \text{as } \rho \to -\infty, \\ (U_2,\, V_2) \approx \left(0,\, \beta_0^+ + \beta_1^+\rho + \beta_2^+\dfrac{\rho^2}{2}\right) & \text{as } \rho \to +\infty \end{cases} \tag{5}$$

$$\vdots$$

が成り立つことが要請される．ここで，係数 $\alpha_i^\pm = \alpha_i^\pm(\sigma,t)$, $\beta_j^\pm = \beta_j^\pm(\sigma,t)$, $\gamma^\pm = \gamma^\pm(\sigma,t)$ は，解 $(u(x,t;M), v(x,t;M))$ をリスケールせずに ε の冪級数に漸近展開する際に現れる諸係数の $x \to \Gamma(t) \pm 0\nu$ における漸近値などである．例えば，

$$\alpha_1^- = \lim_{M\to\infty} \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma(t)-0\nu}, \quad \alpha_1^+ = \lim_{M\to\infty} \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\Gamma(t)+0\nu}$$

など．ただし，ν は $\Gamma(t)$ の単位法ベクトルであり，向きは $u(\cdot,t;\infty)$ の台から $v(\cdot,t;\infty)$ の台へ向くものとする．また，ρ の関数 f と g に対し,「$\rho \to +\infty$ (等) のとき $f(\rho)-g(\rho) \to 0$ が成り立つ」ことを，“$f \approx g$ as $\rho \to +\infty$ (等)” と略記する．

角遷移層付近での (u,v) の近似として漸近展開 (2) を有限次で打ち切ったものを採用する際に，少なくとも何次の項まで調べる必要があるだろうか？　答は「$j=2$ まで」である．なぜなら，(2) を代入した (1) の両辺を ε の冪級数として漸近展開するとき，ε^{-3}, ε^{-2}, ε^{-1}, ε^{0} の項が消えるような (U_j, V_j) を探すと，ちょうど三つの条件 (3)(4)(5) が要請されるからである．つまり，我々は楕円型境界値問題 (4) だけでなく，楕円型境界値問題 (5) も解く必要がある．

3　漸近解の構成

以下では，(4)(5) を満たす (U_1,V_1), (U_2,V_2) の解析結果を述べる．

補題 1. 楕円型境界値問題

$$\begin{cases} \psi'' = \psi^2 - \xi^2, & \xi \in (-\infty,+\infty), \\ \psi > |\xi|, & \xi \in (-\infty,+\infty), \\ \psi \approx |\xi| & as\ |\xi| \to \infty \end{cases} \tag{6}$$

の解 ψ は一意に存在する．

関数 $\psi(\xi)$ の挙動が (1) の角遷移層での漸近解の挙動を左右する．

(A): 正の数 T と $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな超曲面 $\overline{\Gamma}$ を一つずつ固定する．このとき，$\alpha_i^{\pm} = \alpha_i^{\pm}(\sigma,t)$ $(i=0,1)$, $\beta_j^{\pm} = \beta_j^{\pm}(\sigma,t)$ $(j=0,1,2)$, $\gamma^{\pm} = \gamma^{\pm}(\sigma,t)$ は $\overline{\Gamma}\times[0,T]$ 上のなめらかな関数として（それらの各導関数も含めて）$\overline{\Gamma}\times[0,T]$ 上で有界である．さらに，$\alpha_1^{\pm}$ は

$$\sup_{(\sigma,t)\in\overline{\Gamma}\times[0,T]} \alpha_1^{-}(\sigma,t) < 0, \qquad \inf_{(\sigma,t)\in\overline{\Gamma}\times[0,T]} \alpha_1^{+}(\sigma,t) > 0$$

を満たす．

定理 2. 仮定 (A) のもとで，楕円型境界値問題 (4) の解 (U_1,V_1) が存在するための必要十分条件は

$$c\alpha_0^{-} = -bD\alpha_0^{+}, \qquad c\alpha_1^{-} = -bD\alpha_1^{+} \tag{7}$$

である．このとき (4) の解は一意に決まり，

$$\begin{cases} U_1(\rho,\sigma,t) = \left(\dfrac{(\alpha_1^{-})^2 D}{4c}\right)^{\frac{1}{3}} \{\psi(\xi) - \xi\}, \\ V_1(\rho,\sigma,t) = \left(\dfrac{(\alpha_1^{+})^2}{4b}\right)^{\frac{1}{3}} \{\psi(\xi) + \xi\} \end{cases} \tag{8}$$

と表せる．ただし，ψ は (6) の解であり，$\xi = \xi(\rho;\sigma,t)$ は

$$\xi := -\left(\frac{c}{2(\alpha_1^{-})^2 D}\right)^{\frac{1}{3}} (\alpha_0^{-} + \alpha_1^{-}\rho) = \left(\frac{b}{2(\alpha_1^{+})^2}\right)^{\frac{1}{3}} (\alpha_0^{+} + \alpha_1^{+}\rho) \tag{9}$$

で定義される．

ここで，(σ, t) が (7) を満たす限りは，$\rho \in (-\infty, +\infty)$ に対して

$$\xi_\rho = \left(-\frac{c\alpha_1^-}{2D}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{b\alpha_1^+}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > 0 \tag{10}$$

が成り立つことに注意しておこう．

補題 1 と 定理 2 から，(U_1, V_1) の形状について

$$\begin{cases} U_1 > \max\{\alpha_0^- + \alpha_1^-\rho,\ 0\}, \quad \alpha_1^- < U_{1,\rho} < 0, \quad U_{1,\rho\rho} > 0, \\ V_1 > \max\{0,\ \alpha_0^+ + \alpha_1^+\rho\}, \quad 0 < V_{1,\rho} < \alpha_1^+, \quad V_{1,\rho\rho} > 0 \end{cases}$$

が成り立つことがわかる．

定理 3. 仮定 (A), (7) のもとで，(U_1, V_1) を (4) の解とする．楕円型境界値問題 (5) の解 (U_2, V_2) が存在するための必要十分条件は

$$\begin{cases} c\beta_0^- + bD\beta_0^+ \\ \quad = (\gamma^+ - D\gamma^-)\left\{\dfrac{\alpha_0^+}{\alpha_1^+}\dfrac{b\alpha_0^+}{2} + \left(\dfrac{b\alpha_1^+}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi(\xi) - |\xi|)\,d\xi\right\}, \\ c\beta_1^- + bD\beta_1^+ = b\alpha_0^+(\gamma^+ - D\gamma^-), \\ \beta_2^- = \alpha_1^-\gamma^-, \qquad D\beta_2^+ = \alpha_1^+\gamma^+ \end{cases} \tag{11}$$

である．このとき (5) の解は一意に決まる．ただし，ψ は (6) の解であり，$\xi = \xi(\rho; \sigma, t)$ は (9) で定義される．

角遷移層内部での解の挙動と角遷移層外部での解の挙動の間に整合性を持たせるためには，角遷移層内での (u, v) の近似解 $(\varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2, \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2)$ の $\rho \to \pm\infty$ での詳しい挙動が必要である．近似解の一次の係数については，遠方での精密評価として次の定理を示すことができる．

定理 4. 仮定 (A) のもとで，(4) の解 $(U_1, V_1) = (U_1(\rho;\,\sigma, t),\, V_1(\rho;\,\sigma, t))$ は

$$\begin{cases} C \le \left[U_1 - \max\{\alpha_0^- + \alpha_1^-\rho,\, 0\}\right](1 + |\rho|)^{\frac{1}{4}}\exp\left(\dfrac{2\sqrt{b\alpha_1^+}}{3}|\rho|^{\frac{3}{2}}\right) \le C_\delta(1 + |\rho|)^\delta, \\ C \le \left[V_1 - \max\{0,\, \alpha_0^+ + \alpha_1^+\rho\}\right](1 + |\rho|)^{\frac{1}{4}}\exp\left(\dfrac{2\sqrt{b\alpha_1^+}}{3}|\rho|^{\frac{3}{2}}\right) \le C_\delta(1 + |\rho|)^\delta \end{cases} \tag{12}$$

を $(\sigma, t) \in \overline{\Gamma} \times [0, T]$ と $\rho \in (-\infty, +\infty)$ に対して満たす．ただし，正数 δ は任意に固定され，C と C_δ は (ρ, σ, t) に依存しない正定数として選ぶことができる．さらに，$(\sigma, t) \in \overline{\Gamma} \times [0, T]$ と $\rho \in (-\infty, 0]$ に対しては

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial U_1}{\partial \rho} - \alpha_1^-\right| + \left|\dfrac{\partial V_1}{\partial \rho}\right| \le C_\lambda e^{\lambda\rho}, \\ \left|\dfrac{\partial U_1}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial \alpha_0^-}{\partial t} + \dfrac{\partial \alpha_1^-}{\partial t}\rho\right)\right| + \left|\dfrac{\partial V_1}{\partial t}\right| \le C_\lambda e^{\lambda\rho}, \\ \left|\dfrac{\partial U_1}{\partial \sigma_i} - \left(\dfrac{\partial \alpha_0^-}{\partial \sigma_i} + \dfrac{\partial \alpha_1^-}{\partial \sigma_i}\rho\right)\right| + \left|\dfrac{\partial V_1}{\partial \sigma_i}\right| \le C_\lambda e^{\lambda\rho}, \\ \left|\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} - \left(\dfrac{\partial^2 \alpha_0^-}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} + \dfrac{\partial^2 \alpha_1^-}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}\rho\right)\right| + \left|\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}\right| \le C_\lambda e^{\lambda\rho} \\ \hfill (i, j = 1, 2, \ldots, N-1) \end{cases} \tag{13}$$

が成り立ち，$(\sigma, t) \in \overline{\Gamma} \times [0, T]$ と $\rho \in [0, +\infty)$ に対しては

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial U_1}{\partial \rho}\right| + \left|\dfrac{\partial V_1}{\partial \rho} - \alpha_1^+\right| \leq C_\lambda e^{-\lambda\rho}, \\ \left|\dfrac{\partial U_1}{\partial t}\right| + \left|\dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial \alpha_0^+}{\partial t} + \dfrac{\partial \alpha_1^+}{\partial t}\rho\right)\right| \leq C_\lambda e^{-\lambda\rho}, \\ \left|\dfrac{\partial U_1}{\partial \sigma_i}\right| + \left|\dfrac{\partial V_1}{\partial \sigma_i} - \left(\dfrac{\partial \alpha_0^+}{\partial \sigma_i} + \dfrac{\partial \alpha_1^+}{\partial \sigma_i}\rho\right)\right| \leq C_\lambda e^{-\lambda\rho}, \\ \left|\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}\right| + \left|\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} - \left(\dfrac{\partial^2 \alpha_0^+}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} + \dfrac{\partial^2 \alpha_1^+}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}\rho\right)\right| \leq C_\lambda e^{-\lambda\rho} \\ \hfill (i, j = 1, 2, \ldots, N-1) \end{cases} \tag{14}$$

が成り立つ．ただし，正数 λ は任意に固定され，C_λ は (ρ, σ, t) に依存しない正定数として選ぶことができる．

ここで，(U_1, V_1) の値そのものに対する評価 (12) は，導関数に対する評価 (13)(14) に比べて詳しすぎるように思われるかもしれない．しかしながら，角遷移層における (u, v) の近似解 $(\varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2, \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2)$ の正値性を保証するためには精密評価 (12) が不可欠となるのだ．同様な評価が (U_2, V_2) とその導関数に対しても得られるが，煩雑になるため，ここでは (U_2, V_2) の形状に関する性質だけを挙げておく：

定理 3 で保証される (U_2, V_2) は

$$\begin{cases} U_2(\rho; \sigma, t) = \dfrac{1}{c}\left(-\dfrac{1}{2}\left\{1 - \dfrac{\xi}{\psi(\xi)}\right\} Q(\xi; \sigma, t) + \omega(\xi; \sigma, t)\right), \\ V_2(\rho; \sigma, t) = \dfrac{1}{bD}\left(\dfrac{1}{2}\left\{1 + \dfrac{\xi}{\psi(\xi)}\right\} Q(\xi; \sigma, t) + \omega(\xi; \sigma, t)\right) \end{cases} \tag{15}$$

と表すことができる．ただし，$\xi = \xi(\rho; \sigma, t)$ は (9) で定義される．また，$\omega(\xi; \sigma, t)$ は，任意の正数 λ に対し，$|\xi| \to \infty$ において

$$\begin{cases} \omega = O(e^{-\lambda|\xi|}), \\ -\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + 2\psi(\xi)\omega = O(e^{-\lambda|\xi|}) \end{cases} \tag{16}$$

を満たすなめらかな関数であり，$Q(\xi; \sigma, t)$ は

$$\begin{aligned} Q(\xi; \sigma, t) \quad := \quad & \left(\frac{b\alpha_1^+}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left((\gamma^+ - D\gamma^-) \int_0^\xi \psi(\eta)\, d\eta + (\gamma^+ + D\gamma^-)\frac{\xi^2}{2}\right) \\ & + B_0 + B_1 \xi \end{aligned} \tag{17}$$

で与えられる（$B_j = B_j(\sigma, t)$ $(j = 0, 1)$ は ξ に依存しない適当な係数である）．

最後に，定理 4 は ψ についての上下からの評価

$$C(1 + |\xi|)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}|\xi|^{\frac{3}{2}}\right) \leq \psi(\xi) - |\xi| \leq C_\delta (1 + |\xi|)^{-\frac{1}{4}+\delta} \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}|\xi|^{\frac{3}{2}}\right) \tag{18}$$

$$C(1 + |\xi|)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}|\xi|^{\frac{3}{2}}\right) \leq |\psi'(\xi) - \operatorname{sgn}\xi| \leq C_\delta (1 + |\xi|)^{\frac{1}{4}+\delta} \exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}|\xi|^{\frac{3}{2}}\right) \tag{19}$$

からの帰結である．つまり，(18)(19) こそが我々の解析結果の本質である．これら (18)(19) の上からの評価と下からの評価は，次の二つの補題からそれぞれ導かれる：

補題 5. 定数 $a > 0$, $p > -\dfrac{3}{4}$ に対し，区間 $[\xi_0, \infty)$ 上の滑らかな関数 $h(\xi)$, $f(\xi)$ が

$$\begin{aligned} &h(\xi) \geq a\xi && \textit{on } [\xi_0, \infty), \\ &f(\xi) = O\left(\xi^p \exp\left(-\frac{2\sqrt{a}}{3}\xi^{\frac{3}{2}}\right)\right) && \textit{as } \xi \to \infty \end{aligned}$$

をみたすものとする．このとき，区間 $[\xi_0, \infty)$ 上の滑らかな関数 $\phi(\xi)$ が

$$\begin{cases} \phi'' - h(\xi)\phi = f(\xi) & \textit{on } [\xi_0, \infty), \\ \lim\limits_{\xi \to \infty} \phi(\xi) = 0 \end{cases}$$

をみたせば,

$$\phi(\xi) = O\left(|\xi|^{p+\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{2\sqrt{a}}{3}\xi^{\frac{3}{2}}\right)\right) \qquad \textit{as } \xi \to \infty$$

が成り立つ.

補題 6. 区間 $[1, \infty)$ 上で

$$h(\xi) \geq \max\{0, \xi h'(\xi)\}$$

をみたす関数 $h(\xi)$ に対し，滑らかな関数 $\phi(\xi)$ が区間 $[1, \infty)$ 上で

$$\begin{cases} \phi'' \leq h(\xi)\phi, \\ \phi(\xi) > 0 \end{cases}$$

をみたすものとする．このとき,

$$\phi(\xi) \geq \phi(1)\xi^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\int_1^{\xi} \sqrt{h(\eta)}\, d\eta\right) \qquad \textit{on } [1, \infty)$$

が成り立つ.

この二つの補題は，最大値原理をうまく活用することによって証明できる.

参考文献

[1] E.N. Dancer, D. Hilhorst, M. Mimura and L.A. Peletier, *Spatial segregation limit of a competition-diffusion system*, European J. Appl. Math., **10** (1999), 97–115.

[2] M. Iida, K. Nakashima and E. Yanagida, *On certain one-dimensional elliptic systems under different growth conditions at respective infinities*, Advanced Studies in Pure Mathematics, **47-2** "Asymptotic Analysis and Singularities" (2007), 565–57.

[3] K. Nakashima and T. Wakasa, *Generation of interfaces for Lotka-Volterra competition-diffusion system with large interaction rates*, J. Differential Equations, **235** (2007), 586–608.