Asymptotic profile of the Navier-Stokes flow around a rotating obstacle

菱田 俊明
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

この研究は R. Farwig (ドイツ, Darmstadt 工科大学) との共同である.

非圧縮粘性流体が 3 次元外部領域をみたし, 剛体の障害物が x_3-軸の周りを一定な回転角速度 $\omega = (0,0,a)^T, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, で回転する問題を考える. D を滑らかな境界 ∂D をもつ 3 次元外部領域とする. $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ は流体の速度ベクトル, p は圧力をあらわす. 回転座標系で書き直した D 上の Navier-Stokes 問題

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u + u \cdot \nabla u = \Delta u + (\omega \times x) \cdot \nabla u - \omega \times u - \nabla p, \\
&\mathrm{div}\ u = 0, \\
&u|_{\partial D} = \omega \times x, \qquad u \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

の定常流 (元の座標系では時間周期流) の一意存在と漸近挙動 ([5], [3]), および安定性 ([6], [9]) が, 十分小さい $|\omega|$ に対して示されている. その空間無限遠での u の減衰度は $O(1/|x|)$ であるが, どのような形で減衰するのであろうか. 回転軸という特別な方向があるので, その形は異方性を有すると期待したい. しかし, 回転の影響によるそのような情報はこれまでの研究でまったく得られていない.

もし障害物が回転軸の方向に並進運動もすると, 並進のみするとき ([4], [13] 等) と同様な航跡が現れる ([7]). このときは並進しないときに比べて減衰構造が良いために, 並進のみするときと同様に, 線型から来る部分が Navier-Stokes 流の leading profile となるであろう. しかし, 並進を伴わないときは, 障害物が静止のとき ([2], [11], [10]) と同様に, Navier-Stokes 流の leading profile は非線型効果を含むはずである. それを決定するのが本講演の目的である. leading profile は, 線型 Stokes 流に対する知見 (回転軸の役割) と障害物が静止のときの Navier-Stokes 流に対する最近の [10] の指摘から予想できる. それは回転軸 (x_3-軸) 対称で (-1) 次同次な explicit に書き下せる Navier-Stokes 方程式の厳密解 (5) である. この解はランダウ-リフシッツの教科書 [12] の 23 節において, 全く異なる目的 (液中ジェットの問題) で求められている. この本に先立ちランダウが彼の 1944 年の論文で計算したのが最初のようで, Landau solution と呼ばれる. Korolev-Šverák [10] は, これが外部 Navier-Stokes 流の $|x| \to \infty$ での漸近形を与えることを指摘した. Landau solution は $\mathbb{R}^3$ の元によりパラメトライズされるが, これが対称軸の方向べ

クトルであり, 特に我々の回転の問題においては, 回転軸の方向ベクトルである.

まず回転の影響による波の形を捉えるために, 線型 Stokes 流を $|x| \to \infty$ で漸近展開して異方性を取り出そう. もちろん基本解が密接に関わるのであるが, 方程式が変数係数であるために基本解は $\Gamma(x, y)$ の形となり, leading profile は自明でない. 線型に対する結論を粗く述べると,

(1) leading profile は通常の Stokes 基本解の第 3 列ベクトルであり, その係数は障害物に働く力 (net force) の第 3 成分 (回転軸方向の成分) である;

(2) 次の第 2 項は $|x|^{-2}$ の速さで減衰するが, その profile は回転運動 $e_3 \times x$ を含み, これの係数は障害物に働く力のモーメント (torque) の第 3 成分 (回転軸方向の成分) である.

詳しく述べよう. $F \in C_0^\infty(\overline{D})^{3\times 3}$ を与えて, 線型の外部境界値問題

$$
\begin{aligned}
-\Delta u - (\omega \times x)\cdot \nabla u + \omega \times u + \nabla p = \operatorname{div} F \qquad &\text{in } D, \\
\operatorname{div} u = 0 \qquad &\text{in } D, \\
u|_{\partial D} = \omega \times x&
\end{aligned}
\tag{2}
$$

を考える. どのようなクラスで (2) の解が一意的に存在するのかは, Navier-Stokes 問題 (1) を解くために既に調べられている. ([8] の L_q 理論を経て) [3] でのクラスは, $u \in L_{3,\infty}$, $(\nabla u, p) \in L_{3/2,\infty}$ である. ただし, $L_{q,\infty}$ は弱-L_q 空間をあらわす. その一意解について,

定理 1 $|x| \to \infty$ のとき,

$$
\begin{aligned}
u(x) &= U_{1st}(x) + U_{2nd}(x) + O\left(1/|x|^3\right), \\
p(x) &= P_{1st}(x) + O\left(1/|x|^3\right)
\end{aligned}
$$

と展開される. ここで,

$$
\begin{aligned}
U_{1st}(x) &= \frac{1}{8\pi}\int_{\partial D} (\nu\cdot(T+F))_3\, d\sigma_y \left(\frac{e_3}{|x|} + \frac{x_3 x}{|x|^3}\right) \\
&= E_{St}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_{\partial D}(\nu\cdot(T+F))_3\, d\sigma_y \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{2nd}(x) &= \frac{1}{8\pi|x|^3}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{3\,(x\otimes x)}{8\pi|x|^5}\begin{pmatrix} \frac{\alpha'}{2}x_1 \\ \frac{\alpha'}{2}x_2 \\ \alpha_3 x_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\beta(e_3\times x)}{8\pi|x|^3} + \left\{\alpha - \frac{3\left(\frac{\alpha'}{2}|x'|^2 + \alpha_3 x_3^2\right)}{|x|^2}\right\}\frac{x}{8\pi|x|^3},
\end{aligned}
$$

$$P_{1st}(x) = \int_{\partial D} \{(\nu \cdot (\Delta u))\, y - p\nu + \nu \cdot F\}\, d\sigma_y \ \ \cdot Q_{St}(x).$$

ただし, ν は境界 ∂D 上の外向き単位法線ベクトル,

$$E_{St}(x) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{|x|}\mathbb{I}_3 + \frac{x \otimes x}{|x|^3}\right), \qquad Q_{St}(x) = \frac{x}{4\pi|x|^3}$$

は Stokes 基本解,

$$T = T(u, p) = \nabla u + (\nabla u)^T - p\mathbb{I}_3$$

は応力テンソルで,

$$\begin{aligned}
&\alpha = -\int_{\partial D} y \cdot (\nu \cdot (T + F))\, d\sigma_y + \int_D trF\, dy = \alpha' + \alpha_3,\\
&\alpha' = -\int_{\partial D} y' \cdot (\nu \cdot (T + F))'\, d\sigma_y + \int_D (F_{11} + F_{22})\, dy,\\
&\alpha_3 = -\int_{\partial D} y_3(\nu \cdot (T + F))_3\, d\sigma_y + \int_D F_{33}\, dy,\\
&\beta = e_3 \cdot \int_{\partial D} y \times (\nu \cdot (T + F))\, d\sigma_y + \int_D (F_{12} - F_{21})\, dy,\\
&\nu \cdot (T + F) = \Big((\nu \cdot (T + F))', (\nu \cdot (T + F))_3\Big)^T = \left(\sum_j (T_{ij} + F_{ij})\nu_j\right)_{1 \le i \le 3},\\
&x = (x', x_3)^T, \quad y = (y', y_3)^T.
\end{aligned}$$

さて, Landau は Navier-Stokes 方程式

$$(3) \qquad -\Delta u + \nabla p + u \cdot \nabla u = 0, \qquad \mathrm{div}\ u = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

を考えて, 指定された軸に関して対称, かつ同次性

$$(4) \qquad u(x) = \frac{1}{|x|}u\left(\frac{x}{|x|}\right), \qquad p(x) = \frac{1}{|x|^2}p\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

の条件のもとで厳密解を求めた. 対称軸を極軸とする極座標 (r, θ, ϕ) (θ は極軸からの天頂角, ϕ は極軸周りの偏角) をとり, それに関する u の成分を

(u_r, u_θ, u_ϕ) とする．対称性の仮定より $u_\phi = 0$, また u_r, u_θ は ϕ に依らずに r, θ の関数であるが, 同次性 (4) より

$$u_r = \frac{V(\theta)}{r}, \qquad u_\theta = \frac{W(\theta)}{r}, \qquad p = \frac{Q(\theta)}{r^2}$$

と書ける．独立変数が θ の常微分方程式を解くことで, これらが定まる．対称軸が x_3-軸であるときの Landau solution を直交座標で書き直すと, 以下のようになる ($c \in \mathbb{R}$ は $|c| > 1$ であるパラメータ):

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 2\,\frac{x_1(cx_3 - |x|)}{|x|(c|x| - x_3)^2}, \\ u_2(x) &= 2\,\frac{x_2(cx_3 - |x|)}{|x|(c|x| - x_3)^2}, \\ u_3(x) &= 2\,\frac{c|x|^2 - 2x_3|x| + cx_3^2}{|x|(c|x| - x_3)^2}, \\ p(x) &= 4\,\frac{cx_3 - |x|}{|x|(c|x| - x_3)^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

そして, これは $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ の中で

$$-\Delta u + \nabla p + u \cdot \nabla u = be_3\delta, \qquad \mathrm{div}\ u = 0 \tag{6}$$

を満たす．ただし, δ は Dirac measure, b は (5) が含むパラメータ c から

$$b = b(c) = \frac{8\pi c}{3(c^2 - 1)} \left(2 + 6c^2 - 3c(c^2 - 1) \log \frac{c+1}{c-1} \right) \tag{7}$$

のように定まる ([1], [10])．関数 $b(\cdot)$ は区間 $(-\infty, -1)$ および $(1, \infty)$ で単調減少, $b(c) \to 0\,(|c| \to \infty)$, $b(c) \to -\infty\,(c \to -1)$, $b(c) \to \infty\,(c \to 1)$ であるから, $b \neq 0$ が与えられれば c がただ一つ確定する．

与えられた (1) の解 (u, p) に対して

$$N = \int_{\partial D} \nu \cdot T\, d\sigma, \qquad \widetilde{N} = \int_{\partial D} \nu \cdot (T - u \otimes u)\, d\sigma$$

とおくとき, 境界条件と $e_3 \cdot (\omega \times x) = 0$ より $e_3 \cdot N = e_3 \cdot \widetilde{N}$ に注意する．(7) の関数 $b(\cdot)$ を用いて, $b(c) = e_3 \cdot N$ から定まる c をもつ (5) の Landau solution を (U, P) であらわそう．U の x_3-軸対称性から, 各点 $x \neq 0$ で

$$(e_3 \times x) \cdot \nabla U - e_3 \times U = 0$$

が成り立ち, また U の特異性は $1/|x|$ だから $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ においてもこの等式が成り立つ. 従って, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ の中で

$$(8)\quad -\Delta U-(\omega\times x)\cdot\nabla U+\omega\times U+\nabla P+U\cdot\nabla U=(e_3\cdot N)\,e_3\delta,\quad \mathrm{div}\ U=0$$

となる.

次の定理の意味で (remainder の減衰の速さを可積分性で捉えた弱い意味で), U は u の leading term であることが示される.

定理 2 (u,p) を $|u(x)|\le C/|x|$ のように減衰する (1) の滑らかな小さい解とし, $e_3\cdot N$ もまた小さいとする. U を上記のとおりとすると, 任意の $q\in(3/2,3)$ に対して, $u-U\in L_q(D)$ が成り立つ.

References

[1] M. Cannone and G. Karch, Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system?, J. Differential Equations **197** (2004), 247–274.

[2] P. Deuring and G. P. Galdi, On the asymptotic behavior of physically reasonable solutions to the stationary Navier-Stokes system in three-dimensional exterior domains with zero velocity at infinity, J. Math. Fluid Mech. **2** (2000), 353–364.

[3] R. Farwig and T. Hishida, Stationary Navier-Stokes flow around a rotating obstacle, Funkcial. Ekvac. **50** (2007), 371–403.

[4] R. Finn, On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems, Arch. Rational Mech. Anal. **19** (1965), 363–406.

[5] G. P. Galdi, Steady flow of a Navier-Stokes fluid around a rotating obstacle, J. Elasticity **71** (2003), 1–31.

[6] G. P. Galdi and A. L. Silvestre, Strong solutions to the Navier-Stokes equations around a rotating obstacle, Arch. Rational Mech. Anal. **176** (2005), 331–350.

[7] G. P. Galdi and A. L. Silvestre, Further results on steady-state flow of a Navier-Stokes liquid around a rigid body. Existence of the wake, Kyoto Conference on the Navier-Stokes Equations and their Applications, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B1** (2007), 127–143.

[8] T. Hishida, L^q estimates of weak solutions to the stationary Stokes equations around a rotating body, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 743–767.

[9] T. Hishida and Y. Shibata, L_p-L_q estimate of the Stokes operator and Navier-Stokes flows in the exterior of a rotating obstacle, Arch. Rational Mech. Anal., in press (Online published).

[10] A. Korolev and V. Sverak, On the large-distance asymptotics of steady state solutions of the Navier-Stokes equations in 3D exterior domains, arXiv:math/07110560, preprint (2007).

[11] S. A. Nazarov and K. Pileckas, On steady Stokes and Navier-Stokes problems with zero velocity at infinity in a three-dimensional exterior domain, J. Math. Kyoto Univ. **40** (2000), 475–492.

[12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 竹内均訳, 流体力学 1, 東京図書, 1970 (原著は 1954).

[13] Y. Shibata, On an exterior initial boundary value problem for Navier-Stokes equations, Quart. Appl. Math. **57** (1999), 117–155.