Global solutions for two-dimensional nonlinear Klein-Gordon systems in the presence of mass resonance *

砂川 秀明 (大阪大・理)†

空間 2 次元における非線形 Klein-Gordon 方程式系

$$(\partial_t^2 - \Delta_x + m_k^2)u_k = F_k(u, \partial u), \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+2}, k = 1, 2, \tag{1}$$

の初期値問題を考える. ここで $u = (u_j)_{j=1,2}$ を未知関数, $\partial u = (\partial_a u_j)_{\substack{j=1,2\\a=0,1,2}}$, $\partial_0 = \partial_t$, $\partial_1 = \partial_{x_1}$, $\partial_2 = \partial_{x_2}$ とし, m_1, m_2 は正定数であるとする ($m_1 \leq m_2$ としても一般性を失わない). 本質的でない煩わしさを避けるために, 非線形項 F_1, F_2 は $(u, \partial u)$ についての 2 次斉次多項式とする. また, 初期条件については

$$u_k(0, x) = \varepsilon f_k(x), \quad \partial_t u_k(0, x) = \varepsilon g_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2, k = 1, 2 \tag{2}$$

とする. ここで f_k, $g_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varepsilon > 0$.

空間 2 次元における非線形 Klein-Gordon 方程式系では, 質量 m_1 と m_2 の比と非線形項 F_1, F_2 の形状に応じて解の長時間挙動の定性に次のような違いが生じることが知られている:

(i) $\underline{m_2 \neq 2m_1 \text{ の場合}}$: F_1, F_2 の形状に関わりなく, ε が十分小さければ (1)–(2) の解は時刻無限大において適当な自由解に漸近する. 特に次の評価が成り立つ:

$$\sum_{|I| \leq 1} \|\partial^I u(t, \cdot)\|_{L^p} \leq C\varepsilon(1 + |t|)^{-(1-2/p)}. \tag{$*$}$$

但し, $p \in [2, \infty]$. (**注**: 自由解に対してこの評価が成り立つことはよく知られている.)

(ii) $\underline{m_2 = 2m_1 \text{ の場合}}$: F_1, F_2 (および f_k, g_k) を適当に選ぶと, ε がどんなに小さくても評価式 $(*)$ が**成立しない**ようにできる. (**注**: その最も単純な例は $F_1 = 0$, $F_2 = u_1^2$. この場合には, f_k, $g_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ を適当に取れば ε がどんなに小であっても

$$\sum_{|I| \leq 1} \|\partial^I u(t, \cdot)\|_{L^2} \geq C\varepsilon^2 \log |t| \qquad (|t| \gg 1)$$

となるようにできる.)

(i) に関連した研究は多数あり, Tsutsumi [7], 講演者 [3], Delort–Fang–Xue [1] 等の結果によって本質的な部分はほぼ解明されている. これに対して (ii) に関連した研究はまだきわめて少なく, 講演者 [4], [5], Fang–Xue [2], Taflin [6] 等による部分的な結果はあるものの,

---

*於 熊本大学応用解析セミナー, 2008 年 12 月 6 日 (土).
†本講演の内容は川原雄一朗氏 (同志社高校) との共同研究に基づく.

本質的な部分は依然として謎のままである．なお, Delort–Fang–Xue [1] では $m_2 = 2m_1$ の場合でも $(*)$ のタイプの評価が成り立つための非線形項の形状に関する十分条件が述べられていて, 彼らはそれを "null condition" と呼んでいるが, (F_1, F_2 が具体的に与えられたときにそれが彼らの条件を満たすかどうかを確認することは容易でないという意味で) あまり見通しの良い条件とは言い難い (実際, [1] には条件を満たす非線形項の例は一つも挙げられていない)．今回我々は, $m_2 = 2m_1$ の場合に評価式 $(*)$ が成り立つための非線形項の形状に関する新しい十分条件を得ることができた．その条件は [1] で導入された条件を真に含むばかりでなく, (上述の意味で) [1] の条件よりもはるかに見通しのよい条件になっている．主結果を述べるためにいくつかの記号を導入する．

記号. $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{H}$ と $k = 1, 2$ に対して

$$\Phi_k(\boldsymbol{\omega}) = \int_0^1 F_k\big(V(\theta), W(\boldsymbol{\omega}, \theta)\big)\, e^{-2k\pi i\theta}\, d\theta$$

とおく． 但し $i = \sqrt{-1}$, $\mathbb{H} = \{\boldsymbol{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 = 1\}$． また, $V(\theta) = \big(\cos 2j\pi\theta\big)_{j=1,2}$, $W(\boldsymbol{\omega}, \theta) = \big(-\omega_a m_j \sin 2j\pi\theta\big)_{\substack{j=1,2\\ a=0,1,2}}$．

本講演の主結果は次の通り:

定理. $m_2 = 2m_1$ とし, 次の (a), (b) のうちいずれか一方を仮定する:

(a) $\Phi_1(\boldsymbol{\omega}) = \Phi_2(\boldsymbol{\omega}) = 0$ $(\forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{H})$.

(b) $\mathrm{Im}\big(\Phi_1(\boldsymbol{\omega}) \cdot \Phi_2(\boldsymbol{\omega})\big) = 0$ $(\forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{H})$ かつ $\displaystyle\inf_{\omega \in \mathbb{H}} \mathrm{Re}\big(\Phi_1(\boldsymbol{\omega}) \cdot \Phi_2(\boldsymbol{\omega})\big) > 0$.

このとき, 十分小さい ε に対して初期値問題 (1)–(2) は大域的な古典解をただ一つ持つ．さらにその解 u は減衰評価 $(*)$ を満たす．

注意 1. 条件 (a) の下では解が漸近自由であることも証明できる．しかし条件 (b) の下で結論できるのは自由解と同じオーダーで減衰するということだけであり, 漸近自由であることは結論出来ない (講演者は漸近自由にはならないと予想しているが, 目下のところその証明はできていない)．ちなみに, (a) は Delort-Fang-Xue [1] の "null condition" と同値な条件になっている．例えば

$$F_1 = (\partial_1 u_1)(\partial_2 u_2) - (\partial_2 u_1)(\partial_1 u_2), \qquad F_2 = (\partial_t u_1)^2 - |\nabla_x u_1|^2 + m_1^2 u_1^2$$

は (a) を満たす．

注意 2. 条件 (b) を満たす非線形項の例は

$$F_1 = u_1 u_2, \qquad F_2 = u_1^2$$

等．Dirac-Klein-Gordon 系や Maxwell-Higgs 系等, 応用上重要な方程式系のいくつかはこれとよく似た構造を持っている．

注意 3. 例えば

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = u_1^2$$

の場合には (a) も (b) も満たされない. 既に述べたように, この場合には解のエネルギーは時間に関して対数オーダーで増大するのだから, $(*)$ のタイプの評価は成り立ち得ない.

参考文献

[1] J.-M. Delort, D. Fang and R. Xue, *Global existence of small solutions for quadratic quasilinear Klein-Gordon systems in two space dimensions,* J. Funct. Anal **211** (2004), 288–323.

[2] D. Fang and R. Xue, *Global existence and asymptotics behavior of solutions for a resonant Klein-Gordon systems in two space dimensions,* Chinese Ann. Math. Ser. B **26** (2005), 89–104.

[3] H. Sunagawa, *On global small amplitude solutions to systems of cubic nonlinear Klein-Gordon equations with different mass terms in one space dimension,* J. Differential Equations **192** (2003), 308–325.

[4] H. Sunagawa, *A note on the large time asymptotics for a system of Klein-Gordon equations,* Hokkaido Math. J. **33** (2004), 457–472.

[5] H. Sunagawa, *Large time asymptotics of solutions to nonlinear Klein-Gordon systems,* Osaka J. Math. **42** (2005), 65–83.

[6] E. Taflin, *Simple non-linear Klein-Gordon equations in two space dimensions, with long-range scattering,* Lett. Math. Phys. **79** (2007), 175–192.

[7] Y. Tsutsumi, *Stability of constant equilibrium for the Maxwell-Higgs equations,* Funkcial. Ekvac. **46** (2003), 41–62.