The initial value problem for a third-order dispersive flow into compact almost Hermitian manifolds

小野寺 栄治（九州大学大学院数理学研究院）
onodera@math.kyushu-u.ac.jp

(N, J, g) をコンパクト概エルミート多様体とする (J は概複素構造, g はエルミート計量). N 上の計量 g に関する Levi-Civita 接続を ∇^N と表すことにする. 本講演では, N 上の曲線の運動を記述する 3 階非線型分散型時間発展方程式の初期値問題

$$u_t = a\,\nabla_x^2 u_x + J_u \nabla_x u_x + b\, g_u(u_x, u_x) u_x \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times X, \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{in} \quad X \tag{2}$$

の解法を考察する. ここに, $a, b \in \mathbb{R}$, $u(t, x) : \mathbb{R} \times X \to N$ は未知関数, $u_0(x) : X \to N$ は与えられた初期値, $X = \mathbb{R}$ または $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $u_t = du(\frac{\partial}{\partial t})$, $u_x = du(\frac{\partial}{\partial x})$, $\nabla_x (= \nabla^N_{u_x})$ は写像 u に沿った x 方向の共変微分, J_u と g_u はそれぞれ $u \in N$ における概複素構造とエルミート計量を表す. 方程式 (1) は, 古典力学に現れる渦糸や古典スピン等の $\mathbb{S}^2$-値モデル

$$\vec{u}_t = \vec{u} \times \vec{u}_{xx} + a \left[\vec{u}_{xxx} + \frac{3}{2} \{ \vec{u}_x \times (\vec{u} \times \vec{u}_x) \}_x \right], \quad \vec{u}(t, x) \in \mathbb{S}^2$$

- $a = b = 0$**:** Da Rios (1906), Hasimoto (1972)
- $a \neq 0$**,** $b = a/2$**:** Fukumoto-Miyazaki (1991)

を幾何学的に一般化することにより導出される. 特に $a = b = 0$ のとき, (1) の解は（1 次元）シュレーディンガー写像とよばれる.

本研究の目的は, 多様体を一般化することを通じて, 方程式 (1) の偏微分方程式系としての構造と (N, J, g) の幾何学的設定との関係を調べることである.

初期値問題 (1)-(2) の解の存在問題に関しては, 以下が知られている：

- $a = b = 0$**:** Koiso (1997), Pang-Wang-Wang (2002)
  (i) N : ケーラー多様体 $\Longrightarrow$ 時間局所解の存在
  (ii) N : 局所エルミート対称空間 ($\nabla^N R = 0$) $\Longrightarrow$ 時間大域解の存在
- $a \neq 0$**,** $b \in \mathbb{R}$**:** Onodera(2008) ($N = \mathbb{S}^2$, $b = a/2$ の場合は Nishiyama-Tani(1997))
  (i) N : ケーラー多様体 $\Longrightarrow$ 時間局所解の存在
  (ii) N : 定曲率 ($\equiv K$) 閉リーマン面, $b = aK/2$ $\Longrightarrow$ 時間大域解の存在

上記の先行研究では N がケーラー多様体であることが仮定されている. この場合, ∇^N が Levi-Civita 接続であること及び N のケーラー性 $\nabla^N J = 0$ によって方程式 (1) が定量的には対称双曲系のように振舞うので, 時間局所解の存在証明は容易である. 実際,

$$\|V\|^2_{L^2(X;TN)} = \int_X g_{u(x)}\,(V(x), V(x))\,dx, \quad V \in \Gamma(u^{-1}TN) \tag{3}$$

に関する古典的エネルギー法が機能する.

本研究では, N のケーラー性が破綻する場合も含めて考察したい. 今回は, **「$a \neq 0$, $X = \mathbb{R}$ の場合, ある種の 3 階分散型方程式の平滑化効果により, 必ずしも N のケーラー性がなくとも時間局所解が一意的に存在する.」** ということがわかった：

定理 1. (N, J, g) をコンパクト概エルミート多様体, ∇^N はレビ・チビタ接続, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $m = 4, 5, 6 \ldots$ とする.

$$u_0 \in C(\mathbb{R}; N), \quad u_{0x} \in H^m(\mathbb{R}; TN)$$

をみたす任意の u_0 に対して, ある $T = T(a, b, N, \|u_{0x}\|_{H^4(\mathbb{R};TN)}) > 0$ が存在して,

$$u \in C([-T, T] \times \mathbb{R}; N), \quad u_x \in C([-T, T] : H^m(\mathbb{R}; TN))$$

をみたす (1)-(2) の時間局所解 u が唯一つ存在する.

証明の要点　必ずしもケーラー性を仮定しないので, (1,1)-テンソル場 $(\nabla_x J_u)$ が一般には消えず, (3) に関する古典的エネルギー法は機能しない. 実際, $\nabla_x^m u_x$ がみたすべき方程式は以下の形になる.

$$\Big(\nabla_t - a\nabla_x^3 - \nabla_x J_u \nabla_x - \underbrace{m(\nabla_x J_u)}_{\text{(3) に関して反対称}} \nabla_x\Big)\nabla_x^m u_x = \cdots .$$

1 階項 $-m(\nabla_x J_u)\nabla_x$ は, $\mathbb{R}$ 上の 3 階分散型方程式の平滑化効果を用いて吸収される. 実際, 誘導束 $u^{-1}TN$ 上のゲージ変換 $\nabla_x^m u_x \mapsto V^{(m)}$,

$$V^{(m)}(t, x) := \nabla_x^m u_x(t, x) \exp\left(-\frac{1}{3a}\int_{-\infty}^{x} g(u_x(t, y), u_x(t, y))dy\right) \tag{4}$$

は $L^2(\mathbb{R}; TN)$ の間の線型同型で, $V^{(m)}$ がみたすべき方程式は

$$\Big(\nabla_t - a\nabla_x^3 - \nabla_x J_u \nabla_x - g(u_x, u_x)\nabla_x^2 - m(\nabla_x J_u)\nabla_x\Big)V^{(m)} = \cdots$$

となる. 2 階楕円型作用素 $-g(u_x, u_x)\nabla_x^2$ が 1 階項 $-m(\nabla_x J_u)\nabla_x = \mathcal{O}(g(u_x, u_x)^{1/2})\nabla_x$ を吸収してエネルギー法が機能する. これは, Tarama(1997) による 3 階線型分散型偏微分作用素の初期値問題が解けるための必要十分条件をみたす低階項のうちの扱いやすい特殊な場合に相当する. 一般にはゲージ変換は擬微分作用素によって与えられる.

証明の方針　必要に応じて Nash の等長埋め込み $\omega : (N, g) \to (\mathbb{R}^d, g_0)$ を用いて N を $\omega(N)$ に置き換える. $\omega(u)$ も u と書くことにする. $t > 0$ で示せば十分である.

Step 1. 放物型近似. $\varepsilon > 0$ とする. 4 階放物型近似方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} u_t^\varepsilon &= -\varepsilon\,\nabla_x^3 u_x^\varepsilon + a\,\nabla_x^2 u_x^\varepsilon + J_u \nabla_x u_x^\varepsilon + b\,g_u(u_x^\varepsilon, u_x^\varepsilon)u_x^\varepsilon \quad &&\text{in} \quad (0, T_\varepsilon) \times \mathbb{R}, \\ u^\varepsilon(0, x) &= u_0(x) &&\text{in} \quad \mathbb{R} \end{aligned}$$

の時間局所解の列 $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を構成する. まず, 方程式を適当に拡張し, $\omega(N)$ の管状近傍に値をとる時間局所解 u^ε を構成する. 次に, u^ε と $w(N)$ との差がみたすべき方程式に

着目すると, ある種の最大値原理がしたがうので, u^ε は $\omega(N)$-値であることがわかる.

Step 2. コンパクト性. ゲージ変換 (4) を組み合わせたエネルギー評価により, $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ の存在時間と大きさに関する一様評価を得る. コンパクト性の議論により, (1)-(2) の解

$$u{\in}C([0,T]\times\mathbb{R};N), \quad u_x{\in}L^\infty(0,T:H^m(\mathbb{R};TN))\cap C([0,T];H^{m-1}(\mathbb{R};TN))$$

が得られる.

Step 3. 一意性. 同じ初期値の解 u, v の差 $u-v$ に対するエネルギー評価により一意性が示される. $\omega(N)$ の $\mathbb{R}^d$ における法束の基底をうまくとることにより, 差に対する方程式系においても, 低階項が悪影響せずに $u-v$ の古典的 H^1-エネルギー法が機能する.

Step 4. 時間連続性の回復. 標準的方法による. $\square$

References

[1] Da Rios, *On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape[in Italian]*, Rend, Circ. Mat. Palermo **22** (1906),117–135.

[2] Y. Fukumoto and T. Miyazaki, *Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity* , J. Fluid Mech. **222** (1991), 369–416.

[3] H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972), 477–485.

[4] N. Koiso, *The vortex filament equation and a semilinear Schrödinger equation in a Hermitian symmetric space*, Osaka J. Math. **34** (1997), 199–214.

[5] E. Onodera, *A third-order dispersive flow for closed curves into Kähler manifolds*, J. Geom. Anal. **18** (2008), 889–918.

[6] E. Onodera, *Generalized Hasimoto transform of one-dimensional dispersive flows into compact Riemann surfaces*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **4** (2008), article No.044, 10 pages.

[7] E. Onodera, *The initial value problem for a one-dimensional third-order dispersive flow into compact almost Hermitian manifolds*, submitted, arXiv:0805.3219.

[8] P. Y. Y. Pang, H. Y. Wang and Y. D. Wang, *Schrödinger flow on Hermitian locally symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **10** (2002), 653–681.

[9] A. Tani and T. Nishiyama, *Solvability of equations for motion of a vortex filament with or without axial flow*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **33** (1997), 509–526.

[10] S. Tarama, *Remarks on L^2-wellposed Cauchy problem for some dispersive equations*, J. Math. Kyoto Univ. **37** (1997), 757–765.