

Asymptotic stability and eternal oscillation of harmonic maps in heat and Schrodinger flows

中西賢次 (京都大学理学部)

(Stephen Gustafson, Tai-Peng Tsai (UBC) との共同研究)

未知関数 $u : \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ に対する方程式

$$u_t = (a_1 P^u + a_2 J^u) \Delta u, \quad (1)$$

を考える。ただし $a_1 \geq 0, a_2 \in \mathbb{R}$ は定数、 P^u, J^u は $\mathbb{R}^3 \rightarrow u^\perp$ の写像で

$$P^u a = a - u \cdot a = -u \times (u \times a), \quad J^u a = u \times a. \quad (2)$$

この方程式は定数 $a = a_1 + i a_2$ によって異なる呼び名を持つ：

$$\begin{aligned} a = 1 & : \text{Harmonic map heat flow,} \\ a = i & : \text{Schrödinger map (Heisenberg model),} \\ a \in \mathbb{C} & : \text{Landau-Lifschitz(-Gilbert) equation.} \end{aligned} \quad (3)$$

$a \in \mathbb{C}$ の場合は強磁性体中のスピンの時空発展を表すモデル方程式である [16, 14]。 $a = 1$ の場合は Eells-Sampson [5] により調和写像へのホモトピーを構成するために考えられた。形式的な計算で得られるエネルギー等式

$$E(u) := \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx, \quad \partial_t E(u) = -a_1 \|P^u \Delta u\|_{L^2}^2 \leq 0 \quad (4)$$

から分かるように、 $a_1 > 0$ なら散逸系、 $a_1 = 0$ では保存系となる。

解の存在について、 $a > 0$ の場合、有限エネルギーの初期値に対して高々有限個の特異点を除いて滑らかな時間大域解が存在し [19]、エネルギー単調な弱解のクラスで一意的 [6]、エネルギーが小さければ特異性は生じない。初期値によっては実際に特異性が生じる [3, 8] が、 $\|\nabla u\|_{BMO_x} \in L_t^2$ なら特異性は生じない [17]。 $a_2 \neq 0$ の場合、 $a_1 > 0$ では [19] と同じタイプの時間大域弱解が存在する [9] が、一意性は分かっていない。 $a_1 = 0$ では、 $H^{3/2+}$ の初期値に対して時間局所解が存在し [12]、 $H^{7/4+}$ では一意 [13]。また H^1 ノルムが十分小なら時間大域解が一意的存在する [2]。

一般に有限エネルギー写像 $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ について写像度を m とすると

$$E(u) \geq 8\pi|m|, \quad (5)$$

最小値は調和写像のみでとる。本講演では、立体射影で $z \mapsto \mu z^m$ ($\mu \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$) の形の調和写像の安定性について、対称性に制限を課して議論する。具体的には、0 と ∞ 、および角度依存を固定する：

$$\begin{aligned} k &= (0, 0, 1), \quad u(0) = -k, \quad u(\infty) = k, \\ x_1 + i x_2 &= r e^{i\theta}, \quad \Omega = k \times, \quad u(x) = e^{m\theta\Omega} v(r). \end{aligned} \quad (6)$$

各時刻 $t \geq 0$ における解のクラスは

$$\Sigma_m := \{u = e^{m\theta\Omega} v(r) \mid v(e^{\pm\infty}) = \pm k, E(u) < \infty\}. \quad (7)$$

調和写像 $z \mapsto \mu z^m$ はこの座標では次の形で与えられる：

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{m\theta\Omega} h[\mu] = e^{(m\theta+\alpha)\Omega} h(r/s), \quad \mu = e^{i\alpha} s^{-m}, \\ h &= h[1] := (r^m + r^{-m})^{-1} (2, 0, r^m - r^{-m}). \end{aligned} \quad (8)$$

これらは Σ_m の基底状態をなす：

$$u \in \Sigma_m \implies E(u) \geq 8m\pi, \quad E(u) = 8m\pi \iff u \in \{e^{m\theta\Omega}h[\mu]\}. \quad (9)$$

1. 主結果

定理 1. $m \geq 3$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ のとき、以下を満たす $\delta > 0$ が存在する：
 $u(0) \in \Sigma_m$, $E(u(0)) \leq 8m\pi + \delta^2$ なら (1) の一意大域解 $u \in C([0, \infty); \Sigma_m)$ が存在し、ある $\mu \in \mathbb{C}^\times$ について

$$\begin{aligned} \|u(t) - e^{m\theta\Omega}h[\mu]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + a_1 E(u(t) - e^{m\theta\Omega}h[\mu]) &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \\ \nabla\{u(t) - e^{m\theta\Omega}h[\mu]\} &\in L^2((0, \infty); L^\infty(\mathbb{R}^2)). \end{aligned} \quad (10)$$

なお、 $a = i$, $E(u) \ll 1$ での一意大域存在は今の対称性の場合 [4] によって与えられたが、エネルギー準位（および境界条件）が異なるので適用できない。

$m \geq 4$ の場合、上の結果は $t \rightarrow \infty$ の収束が弱い形で（2行目のみ、つまり時間平均での収束）既に得られていた [10, 8]. m が低いほど難しくなるのは $h_1(r)$ の減衰の速さに関係している。後で詳しく述べるが、 m が低いほど空間分布が広がるため、その相互作用の時間的影響も大きくなり、 $m = 3$ への拡張は議論の変更が必要となる。実際、 m が更に低くなると、時間漸近挙動にも変化が現れる：

定理 2. $m = 2$, $a = 1$ のとき、以下を満たす $\delta > 0$ が存在する： $u(0) = e^{m\theta\Omega}v(0) \in \Sigma_m$, $E(u(0)) \leq 8\pi m + \delta^2$, $v_2(0) \equiv 0$ なら (1) の一意大域解 $u \in C([0, \infty); \Sigma_m)$ が存在し、ある $s : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ について

$$\begin{aligned} \|u(t) - e^{m\theta\Omega}h(r/s(t))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + E(u(t) - e^{m\theta\Omega}h(r/s(t))) &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \\ \nabla\{u(t) - e^{m\theta\Omega}h(r/s(t))\} &\in L^2((0, \infty); L^\infty(\mathbb{R}^2)). \end{aligned} \quad (11)$$

さらに $s(t)$ の漸近挙動は

$$(1 + o(1)) \log s(t) = \frac{2}{\pi} \int_1^{\sqrt{t}} \frac{v_1(0, r)}{r} dr + O_c(1), \quad (12)$$

ただし $o(1) \rightarrow 0$, $O_c(1)$ は $t \rightarrow \infty$ で有限値（初期値に依る）へ収束。特に、以下の6つの漸近挙動を実現する初期値がそれぞれ存在する。

- (A) $s(t) \rightarrow \exists s_\infty \in (0, \infty)$ （一つの基底状態へ収束）
- (B) $s(t) \rightarrow 0$ （ $x = 0$ へ集約。または、 $u = k$ へ集約）
- (C) $s(t) \rightarrow \infty$ （ $x = \infty$ へ拡散。または、 $u = -k$ へ集約）
- (D) $0 = \liminf s(t) < \limsup s(t) < \infty$ （ $x = 0$ の周りで永久に振動）
- (E) $0 < \liminf s(t) < \limsup s(t) = \infty$ （ $x = \infty$ の周りで永久に振動）
- (F) $0 = \liminf s(t) < \limsup s(t) = \infty$ （ $x = 0$ と $x = \infty$ の間を永久に振動）

これらの漸近タイプは、エネルギーより僅かに局所的な摂動に影響されない。正確には、初期値を変えたとき、その差が $\int_1^\infty |v_1/r| dr < \infty$ を満たせば漸近タイプは変わらない。特に、遠方で $v(r) \rightarrow k$ の収束が速い初期値は全てタイプ (A) になり、(D)-(F) のような奇妙な漸近挙動は空間遠方分布によってのみ引き起こされる。

実際、定義域 \mathbb{R}^2 を S^2 に置き換えると、調和写像は同じだが、時間漸近挙動は $\forall m \geq 1$ でタイプ (A) のみになる事が（比較的容易に）示せる。他方、円板領域 $|x| \leq 1$, $m = 2$ で同じクラスの解を考えると、時間大域存在と調和写像の非存在により無限時間集約タイプ (B) のみとなる [1, 7].

なお、有限時間爆発 ($s \rightarrow 0$) は円板および \mathbb{R}^2 で $m = 1$ の場合に示されている [3, 8]. その証明は比較原理に依るものだが、上の定理の証明では使わない ($a_2 = 0$ の仮定は $v_2 = 0$ を維持するためだけに必要となる)。ちなみに、 \mathbb{R}^2 上の wave map $u_{tt} = P^u \Delta u$ については $\forall m \geq 4, m = 1$ でそれぞれ有限時間爆発の存在が示されている [18, 15]. ただし $m = 1$ で得られた爆発解は高エネルギーである。

2. 証明の概略

2.1. 標準的手法. 解を時間依存の基底状態と残りに分解 $v(t) = h[\mu(t)] + \check{v}(t)$ して、

- (i) 残り $\check{v}(t)$ は分散 (拡散) により時間減衰。
- (ii) パラメータ $\mu(t)$ は非線形項の時間減衰により収束。

このために重要なのは分解の仕方だが、基底状態のパラメータ微分が線形化作用素の kernel になる事に注意すると、他に固有空間が無ければ (今の場合は実際そう)、非線形項の固有空間成分を $\mu(t)$ の変化によって汲みとれる。すると

- (i) \check{v} は連続スペクトル成分のみ (ゆえに線形化作用素で時間減衰)
- (ii) $\dot{\mu}$ は \check{v} について 2 次以上 (ゆえに $\check{v} \in L_t^2$ なら時間可積分)

となって漸近安定性が示せる。しかし、

2.2. 問題点. 固有関数の空間減衰が緩いと ($m \leq 3$)、その直交射影が、時間減衰の為の関数空間では非有界になってしまう。(時間減衰評価がエネルギー評価よりも空間分布に敏感である事を反映している。)

この問題は保存系でも散逸系でも全く変わらない。それは、時間減衰を評価すべき関数空間の空間減衰度は、問題のスケール不変性によって自動的に規定されてしまうからである。具体的に、解のクラス Σ_m の空間スケールは $v_r, v/r \in L^2(\mathbb{R}^2)$ で、これに対応する時空スケールは、 L_t^2 を要請すると

$$v/r \in L_t^2 L_x^\infty \quad (13)$$

である。固有関数 (スカラー成分) は $h_1 = O(r^{-m})$ ($r \rightarrow \infty$) で与えられるが、上の関数空間 rL_x^∞ がこの直交射影で保たれる必要十分条件は

$$rh_1(r) \in L_x^1(\mathbb{R}^2) \quad \text{つまり } m > 3. \quad (14)$$

2.3. 対策 1. 直交分解を放棄し、代わりに局在化された直交条件を考える。($h_1|\varphi) = 1$ を満たす $\varphi(r) \in C_0^\infty(0, \infty)$ を用いて

$$L_x^2 = (h_1) \oplus \varphi^\perp. \quad (15)$$

- 利点: 時間減衰評価は分解で保たれる。
- 欠点: 分解は線形化作用素で保たれない。結果として $\dot{\mu}$ に \check{v} 線形の誤差項が現れ、時間可積分性が得られない。

2.4. 対策 2. $\dot{\mu}$ を空間・時間で直接部分積分する。これにより $m \geq 3$ では有界、 $m = 2$ では非有界な主要項が得られる。

2.5. 技術的問題. この問題は 3 重臨界ケースになっている (スケール不変性、 $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ への Sobolev 埋蔵、 $L_t^2 L_x^\infty(\mathbb{R}^{1+2})$ の endpoint Strichartz 評価) ため、ぎりぎりの評価を多く必要とする。特に $a = i$ の場合、非斉次項に対する double-endpoint Strichartz ($L_t^2 L_x^1 \rightarrow L_t^2 L_x^\infty$) を必要とする。更に $m \leq 3$ では固有関数の緩い減衰が絡み、Strichartz やエネルギー等式よりも精密な評価が必要となる。

REFERENCES

- [1] S. Angenent and J. Hulshof, *Singularities at $t = \infty$ in equivariant harmonic map flow*, Contemp. Math. **367**, Geometric evolution equations, 1–15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [2] I. Bejenaru, A. D. Ionescu, C. E. Kenig and D. Tataru, *Global Schrodinger maps*, preprint, arXiv:0807.0265v1 [math.AP].
- [3] K.-C. Chang, W. Y. Ding, and R. Ye, *Finite-time blow-up of the heat flow of harmonic maps from surfaces*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 2, 507–515.
- [4] N.-H. CHANG, J. SHATAH, & K. UHLENBECK, *Schrödinger maps*, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), no. 5, 590–602.
- [5] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
- [6] A. FREIRE, *Uniqueness of the harmonic map flow from surfaces to general targets*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 310–338; *Correction to: “Uniqueness for the harmonic map flow from surfaces to general targets”*, Comment. Math. Helv. **71** (1996), no. 2, 330–337.
- [7] J. F. Grotowski and J. Shatah, *Geometric evolution equations in critical dimensions*, Calc. Var. Partial Differential Equations **30** (2007), no. 4, 499–512.
- [8] M. Guan, S. Gustafson and T. -P. Tsai, *Global existence and blow-up for harmonic map heat flow*, J. Diff. Equations **246** (2009), 1–20.
- [9] B. Guo B and M.-C. Hong M-C *The Landau-Lifshitz equation of the ferromagnetic spin chain and harmonic maps*, Calc. Var. Partial Differential Equations **1** (1993), 311–334.
- [10] S. Gustafson, K. Kang and T. -P. Tsai, *Asymptotic stability of harmonic maps under the Schrödinger flow*, to appear in Duke Math. J.
- [11] S. Gustafson, K. Nakanishi and T. P. Tsai, in preparation.
- [12] J. Kato, *Existence and uniqueness of the solution to the modified Schrödinger map*, Math. Res. Lett. **12** (2005), 171–186.
- [13] J. Kato and H. Koch, *Uniqueness of the modified Schrödinger map in $H^{3/4+\epsilon}(\mathbb{R}^2)$* , Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), 415–429.
- [14] A. KOSEVICH, B. IVANOV, & A. KOVALEV, *Magnetic Solitons*, Phys. Rep. **194** (1990) 117–238.
- [15] J. Krieger, W. Schlag and D. Tataru, *Renormalization and blow up for charge one equivariant critical wave maps*, Invent. Math. **171** (2008), no. 3, 543–615.
- [16] L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ, *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*, Phys. Z. Sowj. **8** (1935), 153; reproduced in *Collected Papers of L. D. Landau*, Pergamon Press, New York, 1965, 101–114.
- [17] M. Misawa and T. Ogawa, *Regularity condition by mean oscillation to a weak solution of the 2-dimensional harmonic heat flow into sphere*, Calc. Var. Partial Differential Equations **33** (2008), no. 4, 391–415.
- [18] I. Rodnianski and J. Sterbenz, *On the Formation of Singularities in the Critical $O(3)$ Sigma-Model*, preprint, arXiv:math/0605023v3 [math.AP].
- [19] M. STRUWE, *On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces*, Comment. Math. Helv. **60**, 558–581(1985).