非線型連立 Schrödinger 方程式系に対する特異摂動問題*

生駒　典久
早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻　博士課程１年

1　序

この講演では次の非線型連立 Schrödinger 方程式系を考える:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + V_1(x)u = \mu_1 u^3 + \beta uv^2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta v + V_2(x)v = \beta u^2 v + \mu_2 v^3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ \quad u(x),\ v(x) > 0, \quad u,\ v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $\varepsilon > 0$ をパラメータとし, μ_1, μ_2, β は正定数, $N = 2, 3$ とする. $\varepsilon \to 0$ としたときの (1) の解の挙動について考える.

この方程式系は近年活発に研究されている. $\varepsilon = 1$ かつ $V_1(x), V_2(x)$ が正定数のときは [1, 3], $\varepsilon = 1$ かつ $V_1(x), V_2(x)$ が正定数でないときは [2], $\varepsilon \to 0$ としたときの挙動については [4, 6] などがある.

(1) の正値凝集解 $U_\varepsilon(x) = (u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ の挙動としては次のものが考えられる.

(I) $V_1(x)$ の臨界点 x_0 に凝集し, 適当な rescaling の後に $(u_0(x), 0)$ に収束する解. 但し $u_0(x)$ は極限方程式 $-\Delta u + V_1(x_0)u = \mu_1 u^3$ の非自明な解.

(II) $V_2(x)$ の臨界点 x_0 に凝集し, 適当な rescaling の後に $(0, v_0(x))$ に収束する解. 但し $v_0(x)$ は極限方程式 $-\Delta v + V_2(x_0)v = \mu_2 v^3$ の非自明な解.

(III) x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) をそれぞれ $V_1(x)$, $V_2(x)$ の臨界点とするとき, u-成分 $u_\varepsilon(x)$ は x_1 に凝集し, v-成分 $v_\varepsilon(x)$ は x_2 に凝集する解.

---

*早稲田大学の田中和永教授との共同研究

(IV) $U_\varepsilon(x)$ の u-成分, v-成分は共通の点 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ に凝集し, rescaling の後, $U_\varepsilon(x)$ は極限方程式 (2) の (系としての) 非自明な解に収束する.

この講演では (IV) のタイプの解が存在すること示す.
次の仮定をおく.

(A0) $0 < \beta < \sqrt{\mu_1\mu_2}$.

(A1) $V_1, V_2 \in C^1(\mathbb{R}^N)$ かつある $\ell,\ L > 0$ が存在し, 任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $V_1(x),\ V_2(x) \in [\ell, L]$.

(A2) 任意の $\lambda_1,\ \lambda_2 \in [\ell, L]$ に対して

$$-\Delta + \lambda_1 - \beta\omega_{\lambda_2}^2, \quad -\Delta + \lambda_2 - \beta\omega_{\lambda_1}^2$$

は $H^1(\mathbb{R}^N)$ 上, positive definite. 但し, ω_{λ_i} は $-\Delta\omega + \lambda_i\omega = \mu_i\omega^3$ のエネルギー最小解.

次の方程式が (1) の極限方程式として rescaling の後現れる.

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x_0)u = \mu_1 u^3 + \beta uv^2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V_2(x_0)v = \beta u^2 v + \mu_2 v^3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u(x),\ v(x) > 0, \quad u,\ v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{2}$$

$H = H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ とし, 汎関数 $I(x_0; U) : H \to \mathbb{R}$ を次のようにおく. $U = (u, v) \in H$ に対して

$$\begin{aligned} I(x_0; U) := &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V_1(x_0)u^2 + |\nabla v|^2 + V_2(x_0)v^2 dx \\ &- \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u^4 + 2\beta u^2 v^2 + \mu_2 v^4 dx. \end{aligned}$$

次に

$$\mathcal{M}_y := \big\{U = (u, v) \in H \mid u, v \not\equiv 0,\ I'(y; U)(u, 0) = I'(y; U)(0, v) = 0\big\}$$

とし,

$$m(y) := \inf_{U \in \mathcal{M}_y} I(y; U)$$

を考える. 仮定 (A1), (A2) の下では, 各 $y \in \mathbb{R}^N$ に対して $m(y)$ は達成され, minimizer は (2) の非自明解となることが示されている [1, 5].

2 主結果

この講演での主定理は次のものであり, $m(y)$ の極小点に凝集する正値解が存在することを示している.

定理 1. 条件 (A0)–(A2) を仮定する. さらに, 有界開集合 $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ が存在して

$$\inf_{y\in\Lambda} m(y) < \inf_{y\in\partial\Lambda} m(y) \tag{*}$$

が成立するとする. このとき (1) の解 $U_\varepsilon(x)$ $(0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ で Λ 内に凝集するものが存在する. より正確に述べるならば点列 $x_\epsilon \in \mathbb{R}^N$ が存在し, 次をみたす.

(i) 任意の列 $\varepsilon_n \to 0$ に対して部分列 ε_{n_k} をとると

$$x_{\varepsilon_{n_k}} \to x_0 \in K := \{x \in \Lambda |\, m(x) = \inf_{y\in\Lambda} m(y)\}.$$

(ii) $U_{\varepsilon_{n_k}}(\varepsilon_{n_k} x + x_{\varepsilon_{n_k}}) \to U_0 = (u_0(x), v_0(x))$ strongly in H. 但し, U_0 は (2) の系としての最小エネルギー解であり, $I(x_0; U_0) = m(x_0) = \inf_{y\in\Lambda} m(y)$ をみたす.

注意 (i) $\beta \to 0$ のとき $m(y) \to C_1 V_1(y)^{(4-N)/2} + C_2 V_2(y)^{(4-N)/2}$ がわかり, β が小さいとき $m(y)$ の極小点の存在は $V_1(x)$, $V_2(x)$ の形状に依存する.
(ii) $\beta = 0$ の場合 $m(y) = C_1 V_1(y)^{(4-N)/2} + C_2 V_2(y)^{(4-N)/2}$ であるが, $m(y)$ の極小点に凝集する解は一般に存在しない.
(iii) 無限遠での挙動に関する適切な条件を $V_1(x)$, $V_2(x)$ に課せば, (1) の解は次の minimizing method により得られる.

$$b_\epsilon = \inf_{U\in\mathcal{M}_\varepsilon} J_\varepsilon(U),$$

但し,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(U) := &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^2|\nabla u|^2 + V_1(x_0)u^2 + \varepsilon^2|\nabla v|^2 + V_2(x_0)v^2 dx \\ &- \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \mu_1 u^4 + 2\beta u^2 v^2 + \mu_2 v^4 dx, \\ \mathcal{M}_\varepsilon := &\{U = (u,v) |\, u, v \not\equiv 0,\ J_\varepsilon'(U)(u,0) = J_\varepsilon'(U)(0,v) = 0\} \end{aligned}$$

とする. たとえ, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ が $m(y)$ の global minimizer であっても, b_ε に対応する minimizer U_ε は $x_0 \in \mathbb{R}^N$ に凝集せず, (III) のような挙動をもつことがあることが知られている [4].

参考文献

[1] A. Ambrosetti and E. Colorado, *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **75**, 67–82, 2007.

[2] N. Ikoma, preprint.

[3] T.-C. Lin and J. Wei, *Comm. Math. Phys.*, **255**, 629–653, 2005.

[4] T.-C. Lin and J. Wei, *J. Differential Equations*, **229**, 538–569, 2006.

[5] B. Sirakov, *Comm. Math. Phys.*, **271**, 199–221, 2007.

[6] G.-M. Wei, *J. Math. Anal. Appl.*, **332**, 846–862, 2007.