薄い領域における劣線形楕円型方程式

梶木屋 龍治 (佐賀大学・理工学部)

劣線形楕円型方程式の正値解は, 領域が大きくなるほど大きくなる. 領域の薄さを使って, 解の小ささを評価する. 次の方程式を考える.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), \quad u > 0, \quad (x \in \Omega), \\ u = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \end{cases} \tag{E}$$

Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界開集合, $\partial\Omega$ は滑らか, $f \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ とする. 常に次の条件を仮定する.

(i) $f(s)/s$ は $(0,\infty)$ で狭義単調減少. (このとき $f(s)$ は, 劣線形と呼ばれる.)
(ii) $\lim_{s\to 0+} f(s)/s = \infty$ かつ $\lim_{s\to\infty} f(s)/s \le 0$.
(iii) 任意の $R > 0$ に対して, ある $C > 0$ が存在して,

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \ge -C \quad (s, t \in [0, R],\ s \ne t).$$

このとき, (E) の正値解が一意に存在することが知られている. (Brezis-Oswald[1])
定義 1. $u \in C(\overline{\Omega})$ が次を満たすとき, supersolution という.

$$-\int_\Omega u\Delta\phi dx \ge \int_\Omega f(u)\phi dx, \quad (\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),\ \phi \ge 0).$$

逆向きの不等式が成り立つとき, subsolution という.

定理 1.([2]) $u, v \in C(\overline{\Omega})$, $u, v > 0$ $(x \in \Omega)$, u を supersolution, v を subsolution とする. このとき, もし $u \ge v$ $(x \in \partial\Omega)$ ならば, $u \ge v$ $(x \in \Omega)$ である.

系 2. $\Omega = \Omega_i$ に対する (E) の正値解を u_i $(i = 1, 2)$ とする. もし, $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ならば, $u_1(x) \le u_2(x)$ $(x \in \Omega_1)$ である.

従って, 領域が小さいとき, 解も小さくなる. $d > 0$ に対して, $v = v(t)$ の常微分方程式,

$$\begin{cases} -v'' = f(v), \quad v > 0, \quad (-d < t < d), \\ v(-d) = v(d) = 0, \end{cases} \tag{ODE}$$

は一意解を持つ. それを $v(t, d)$ と表す.

定理 3.([3]) $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1} \times (-d, d)$ とする. このとき, $u(x) \le v(x_N, d), \quad (x \in \Omega)$.

$D \subset \mathbb{R}^N$, $d > 0$ のとき, 次を定義する.

$$D_d := \{x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{D} :\ \mathrm{dist}(x, \partial D) < d\}.$$

定理 4.([3]) D を $\mathbb{R}^N$ の有界凸集合とする．もし, $\Omega \subset D_d$ ならば,
$u(x) \leq v(\mathrm{dist}(x, \partial D), d) \quad (x \in \Omega)$.

定理 5.([3]) D を $\mathbb{R}^N$ の有界凸開集合とする．D 内の最大球の半径を d とする．もし $\Omega \subset D$ ならば, $u(x) \leq v(\mathrm{dist}(x, \partial D) - d, d) \quad (x \in \Omega)$.

例 1. d を定理 3, 4, 5 の通りとする．(d は領域の厚さと考えられる.) 正値解 u の L^∞ ノルムを $\|u\|_\infty$ と表すとき, 次が成り立つ.

(i) $f(s) = s^p$ $(0 < p < 1)$ のとき, $\|u\|_\infty \leq Cd^{2/(1-p)}$.
(ii) $f(s) = -s \log s$ のとき, $\|u\|_\infty \leq \exp\left(1/2 - \pi^2/(4d^2)\right)$.

劣線形楕円型方程式の場合, 正値解はすべての解の中で, 最大の解であるから, 定理 3, 4, 5 の評価は, すべての解に対して成り立つ．特に, $f(s)$ が奇関数ならば, $u(x)$ を任意の解 u の絶対値 $|u(x)|$ に代えて成り立つ.

距離が $2d$ だけ離れた 2 枚の平行な超平面に領域 Ω が挟まれたときの, 解の上からの評価を与えたものが定理 3 である．すなわち領域の厚さが $2d$ のときの評価である．$v(t,d)$ は, $t = 0$ で最大となる．$v(0,d)$ を d により上から評価することにより, 例 1 の評価が得られる．領域が, ある凸集合の外部にあるときは, 定理 4 が定理 3 より良い評価を与える．実際に, Ω を円環領域

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N : \ R < |x| < R + \varepsilon\},$$

とする．このとき, 定理 3 は $2d = 2(R+\varepsilon)$ なので, $\|u\|_\infty \leq v(0, R+\varepsilon)$ を示している．しかし, 定理 4 では, $\|u\|_\infty \leq v(0, \varepsilon)$ となり, 良い評価を与えている．$v(t,d)$ は d について狭義増加関数である.

Ω が凸集合の内部にあるときは, 定理 3 より, 定理 5 が良い評価を与える．実際に $N = 2$, Ω を 1 辺の長さが 1 の正三角形とする．このとき, 定理 3 では, $2d = \sqrt{3}/2$ となり, $\|u\|_\infty \leq v(0, \sqrt{3}/4)$ である．しかし, この正三角形の内接円の半径は, $d = 1/(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}/6$ なので, 定理 5 を使うと, $\|u\|_\infty \leq v(0, \sqrt{3}/6)$ となり, こちらのほうが良い評価である．定理の証明の概略を示す.

定理 1 の証明. Mollifier を使って, u, v を滑らかな関数で近似する．以下では, $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ とする．このとき,

$$-\Delta u \geq f(u), \quad -\Delta v \leq f(v), \quad (x \in \Omega). \tag{1}$$

定理の主張に反して,

$$D := \{x \in \Omega : \ u(x) < v(x)\} \neq \emptyset.$$

と仮定する．D は開集合である．D の境界は, 滑らかと仮定する．このとき,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u - v) \geq 0, \quad u = v, \quad (x \in \partial D). \tag{2}$$

ただし, $\partial/\partial\nu$ は, 外向き法線微分を表す. (1) より,

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v)dx \le \int_D (uf(v) - vf(u))dx = \int_D uv\left(\frac{f(v)}{v} - \frac{f(u)}{u}\right)dx < 0.$$

最後の不等式に f の劣線形性 ($f(s)/s$ は減少関数) が使われている. 一方, Green の公式と (2) により, 上式の左辺は, 次式と同じ.

$$\int_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds = \int_{\partial D} u\left(\frac{\partial u}{\partial\nu} - \frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds \ge 0.$$

矛盾が起きている. この矛盾が定理を示している.

∂D が滑らかでないときは, 次のようにする. $v-u$ の critical value は, ルベーグ測度が 0 なので (Sard の定理), $\varepsilon_k > 0$ を 0 に収束する regular value の列として, D の代りに, $D_k := \{x:\ u(x)+\varepsilon_k < v(x)\}$ を使う. D_k に対して Green の公式を使った後で, $k\to\infty$ とする. 証明終.

定理 3 の証明は, 明らか. 定理 4, 5 の証明は, 右辺の v の関数が supersolution になることを示して, 定理 1 を使う. そのために, 次の補題を使う.

補題 1. (ODE) の解 $v(t) = v(t,d)$ は次を満たす. $v(t)$ は concave, $v'(t) > 0$, $(-d < t < 0)$, $v'(t) < 0$, $(0 < t < d)$, $v(-t) = v(t)$, $(-d < t < d)$.

補題 2. D を凸開集合とする. このとき, $\mathrm{dist}(x,\partial D)$ は, D 内で concave であり, D の外で convex となる.

補題 3. D を有界凸開集合, $\partial D \in C^\infty$ とする. $\rho(x) = \mathrm{dist}(x,\partial D)$ とおく. このとき, 次が成り立つ.

(i) $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\overline{D})$, $|\nabla\rho(x)| = 1$, $(x\in\mathbb{R}^N\setminus\overline{D})$.
(ii) D の内部に, あるコンパクト集合 K が存在して, $\mathrm{vol}(K) = 0$, $\rho\in C^\infty(D\setminus K)$, $|\nabla\rho(x)| = 1$, $(x\in D\setminus K)$ が成り立つ. ただし, vol は $\mathbb{R}^N$ のルベーグ測度を表す.

定理 4 の証明. $\rho(x) = \mathrm{dist}(x,\partial D)$ とおく. $w(x) := v(\rho(x),d)$ が supersolution になることを示す. 実際に,

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = v'(\rho(x),d)\frac{\partial\rho}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = v''(\rho(x),d)\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)^2 + v'(\rho,d)\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i^2},$$

なので,

$$\Delta w = v''(\rho(x),d)|\nabla\rho|^2 + v'(\rho(x),d)\Delta\rho(x). \tag{3}$$

補題 2 より, D の外で $\rho(x)$ は凸関数なので, $\Delta\rho(x) \geq 0$ であり, また $x \in \Omega$ のとき, $0 < \rho(x) < d$ なので, 補題 3 より, $v'(\rho(x), d) \leq 0$ となる. さらに $|\nabla\rho| = 1$ なので, (3) 式は, 次のようになる.

$$\Delta w \leq v''(\rho(x), d) = -f(v(\rho(x), d)) = -f(w).$$

すなわち $w(x)$ は supersolution である. $u(x) = 0 \leq w(x)$, $(x \in \partial\Omega)$ なので, 定理 1 より, $u(x) \leq w(x)$ である. 証明終.

定理 5 の証明も定理 4 とほぼ同じである. 次の補題を使う.

補題 4. D を有界開集合, K はコンパクト集合, $K \subset D$, $\mathrm{vol}(K) = 0$ とする. $w \in C(\overline{D}) \cap C^2(D \setminus K)$, $w(x) \geq 0$, $w(x)$ は D で concave とする. w が $D \setminus K$ での supersolution ならば, w は D での supersolution になる.

定理 5 の証明. $w(x) := v(\rho(x) - d, d)$ とおく. K を補題 3 の通りとする. D において $0 < \rho(x) < d$ なので, $v'(\rho(x) - d, d) \geq 0$ であり, $D \setminus K$ において, $\Delta\rho(x) \leq 0$ となる. このとき, (3) より, $D \setminus K$ において,

$$\Delta w \leq v''(\rho(x), d) = -f(v(\rho(x), d)) = -f(w).$$

よって, $w(x)$ は, $D \setminus K$ での supersolution である. 補題 4 より, w は D での supersolution になる. 証明終.

参考文献

[1] H. Brezis and L. Oswald, Remarks on sublinear elliptic equations, *Nonlinear Analysis, T.M.A.* **10** (1986), 55–64.

[2] R. Kajikiya, Comparison theorem and uniqueness of positive solutions for sublinear elliptic equations. *Archiv der Mathematik* **91** (2008),427–435.

[3] R. Kajikiya, A priori estimates of positive solutions for sublinear elliptic equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 3793–3815.