

シュレーディンガー写像の幾何解析

千原浩之 (鹿児島大理)

シュレーディンガー写像の方程式 (M, g) を m -次元閉リーマン多様体, (N, J, h) を $2n$ -次元のコンパクトな概エルミート多様体とする. 本研究では, シュレーディンガー写像 $u : \mathbb{R} \times M \rightarrow N$ の初期値問題

$$u_t = J_u \tau(u) \quad \text{in } \mathbb{R} \times M, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{in } M, \quad (2)$$

の解法について考察する. ここに, $t \in \mathbb{R}$ は時間変数, $x \in M$, $u_t = du(\partial/\partial t)$, $u_0 : M \rightarrow N$ は与えられた初期写像, $\tau(u) = \text{trace } \nabla du$ は写像 $u(t) : M \rightarrow N$ のテンション場, ∇ は $u^{-1}TN$ の誘導接続とする. 粗く言えば, $J_u : T_u N \rightarrow T_u N$ は $J_u \circ J_u = -1$ をみたす線型写像で, $\tau(u)$ は $\Delta_g u$ の $T_u N$ 成分のことである.

古典力学モデル 方程式 (1) は, 古典力学モデル

$$\vec{u}_t = \vec{u} \times \Delta_{\mathbb{R}^m} \vec{u}, \quad \vec{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^2$$

の自然な幾何学的一般化である:

- 渦糸運動 Da Rios (1906), $m = 1$, $x \in \mathbb{R}$ は渦糸 $\vec{\gamma}(t, x)$ の弧長パラメータ, $\vec{u} = \vec{\gamma}_x$.
- 強磁性体 the Heisenberg spin chain system の連続極限.

先行研究 準線型偏微分方程式系 (1) は, 近年では数学の立場で比較的良好に研究されている. 見かけ上は目的の異なる 2 種類の研究に分けられるが, どちらも偏微分作用素としての構造を解明する研究であって本質的には同じ研究と見てよい. すべての先行研究で値域のケーラー性 $\nabla^N J = 0$ が仮定され, この場合には古典的エネルギー法が機能し, 局所的に半線型偏微分方程式系になる.

I. 方程式の幾何学的簡略化

- 立体射影 $\vec{u} \neq (0, 0, 1)$ のとき, $v = (u_1 + \sqrt{-1}u_2)/(1 - u_3)$ は次をみたす:

$$v_t - \sqrt{-1}\Delta_{\mathbb{R}^m} v = \frac{2\sqrt{-1}\bar{v}}{1 + |v|^2} \sum_{i=1}^m (v_{x_i})^2$$

- Chang-Shatah-Uhlenbeck (2000) $M = \mathbb{R}$, N がコンパクトなリーマン面で, u が基点をもつとき, u に沿う標構場を構築して, \mathbb{C} -値の方程式に簡略化.
- Nahmod-Stefanov-Uhlenbeck (2003) $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{S}^2$ の定値写像の摂動を, ある \mathbb{C}^l -値方程式に簡略化.
- Nahmod-Shatah-Vega-Zeng (2007) $M = \mathbb{R}^m$, (N, J, h) がコンパクトなケーラー多様体のときに, u に沿う標構場を構築.

II. 初期値問題の解法

- Sulem-Sulem-Bardos (1986) 古典力学モデルの時間局所解, 時間大域的弱解の構成.
- Koiso (1997) $M = \mathbb{T}$, (N, J, h) はコンパクトなケーラー多様体. 本格的な先駆的研究.
 - 古典力学モデルを (1) の形に定式化.
 - 時間局所解の存在定理.
 - (N, h) が局所対称 $\nabla^N R = 0$ のとき, 解は時間大域的に延長される.
- Gustafson et al (2007) \mathbb{R}^2 から \mathbb{S}^2 への正則同変調和写像の安定性.
- $M = \mathbb{R}^m$ から $N = \mathbb{S}^2$ への定値写像の摂動や Koiso のほぼコピーなどの論文多数.

主定理とその内容説明及び証明のアイデアを述べる.

主定理 $k \in \mathbb{N}$, $2k > m/2 + 5$, $k_0 = \min k$ とする. 任意の $u_0 \in H^{2k}(M; TN)$ に対して, ある $T = T(\|u_0\|_{H^{2k_0}}) > 0$ が存在し, (1)-(2) の解 $u \in C([-T, T]; H^{2k}(M; TN))$ がただ一つ存在する.

主定理の内容説明と証明のアイデア

- x_1, \dots, x_m を M の局所座標系, $g = g_{ij}dx_i \otimes dx_j$, $g_{ik}g^{kj} = \delta_{ij}$, $G = \det[g_{ij}]$ とする. ラプリアン Δ_g に対応する共変微分

$$\tilde{\Delta}_g = \sum_{i,j=1}^m \frac{1}{\sqrt{G}} \nabla_i g^{ij} \sqrt{G} \nabla_j, \quad \nabla_i = \nabla_{du(\partial/\partial x_i)}^N = \sum_{a=1}^{2n} \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial u_a}^N$$

は, M 及び N の座標変換に対して不変で, 大域的に定義される. $\tilde{\Delta}_g^k u$ の大きさ計るのは, $\tau(u)$ の共変微分から処理できない 1 階項を生成しないためである.

- 証明には $u_{x_i}(t) \in H^{2k_0-1}(M; TN) \subset C^4(M; TN)$ が用いられる.
- (N, J, h) がケーラー多様体のとき, i.e., $\nabla^N J = 0$ のとき, (1) は局所的に次のようになる:

$$u_t = \sum_{i,j=1}^m \frac{1}{\sqrt{G}} \nabla_i (g^{ij} \sqrt{G} J_u u_{x_j}), \quad \text{i.e.,} \quad \sum_{i,j=1}^m g^{ij} (\nabla_i J_u) u_{x_j} = 0.$$

この場合には, 古典的エネルギー法が機能するので, 時間局所解の存在は容易である. 別の言い方をすると, $u_{x_i} \mapsto h^{1/2} u_{x_i}$ は, 単独の線型シュレーディンガー型発展方程式

$$w_t - \sqrt{-1} \Delta_g w + Aw + \sqrt{-1} Bw = 0, \quad A, B \in \mathcal{X}(M)$$

に対して, $\text{grad } \Phi = B$ をみたく Φ が存在するときのゲージ変換 $w \mapsto e^{\Phi/2} w$ に対応している. M がコンパクトなので, 初期値問題が解けるのはこの場合に限られると予想されるが, 残念ながら $M = \mathbb{T}^m$ の場合しか証明されていない. 主定理は, 方程式 (1) は局所的に \mathbb{R}^{2n} -値の系なので, 単独方程式よりも悪い低階項に対して少し余裕があることを主張している.

- $V = \tilde{\Delta}_g^{k-1} \tau(u)$ とおく. 方程式 (1) に $\tilde{\Delta}_g^k$ を作用させる:

$$\left\{ \nabla_t - \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^m \nabla_i g^{ij} \sqrt{G} J_u \nabla_j - (2k-1) \sum_{i,j=1}^m g^{ij} (\nabla_i J_u) \nabla_j \right\} V = \dots$$

左辺第 3 項を解消するために, $\Lambda = 1 - \tilde{\Lambda}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} &= -\frac{(2k-1)}{2} \sum_{i,j=1}^m g^{ij} J_u (\nabla_i J_u) \nabla_j (1 - \Delta_g)^{-1} \\ &= \frac{(2k-1)}{2} \sum_{i,j=1}^m g^{ij} (\nabla_i J_u) J_u \nabla_j (1 - \Delta_g)^{-1} \end{aligned}$$

の形の擬微分作用素を, M と N の 1 の分解を用いて properly supported に張り合わせる. $\tilde{\Lambda} \circ \text{主部} - \text{主部} \circ \tilde{\Lambda}$ が左辺第 3 項を消去して,

$$\left\{ \nabla_t - \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^m \nabla_i g^{ij} \sqrt{G} J_u \nabla_j \right\} \Lambda V = \dots$$

となるので, エネルギー法が機能する.

- Λ は誘導束 $u^{-1}TN$ の断面に作用する擬微分作用素であるが, そのような擬微分作用素の一般論はない. 多様体上の擬微分作用素の一般論から来る型 (ρ, δ) の制約と, 表象が滑らかでない擬微分作用素の一般論から来る制約とが相反するので, ベクトル束の断面に作用する擬微分作用素の一般論は誘導束では完全に破綻する. コンパクトな台をもつ超関数核を足し合わせる形で作用素を構成することにより, Λ を機能させることができる.
- Λ の表象が $1 + \mathcal{O}(\langle \xi \rangle^{-1})$ の形になっていることは非常に重要である. 一般に分散型写像流の幾何解析では, テンソルの中にも最高階導関数や derivative loss が発生するが, $1 = \Lambda + \tilde{\Lambda}$ によってテンソルの中の項にも Λ を作用させることができる.

以上