相転移現象に現れる異方的・等方的全変動流

白川 健（神戸大学大学院・工学研究科）

1 導入

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つ有界領域とし, 任意の部分領域 $D \subset \Omega$ に対し, D の (Ω 内での) 外部領域 $\Omega \setminus \overline{D}$ を D^{ex} で表す. また, 2 次元単位閉円盤 $B_1 := \overline{\mathrm{conv}}(\mathbb{S}^1)$ に外接する原点対象な閉凸多角形全体のクラスを $\mathscr{P}$ で表し, 各閉凸多角形 $P \in \mathscr{P}$ に対し, P を単位閉球に持つような 2 次元ノルム (P のゲージ関数) を g_P で表す.

本講演では, 閉凸多角形 $P \in \mathscr{P}$ を与えるごとに定められる, 以下の発展方程式 $(\mathrm{E})_P$ を考える:

$$(\mathrm{E})_P \qquad u'(t) + \kappa\partial V_P(u(t)) \ni u(t) \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad t > 0.$$

ここに, $\kappa > 0$ は十分小さな定数, ∂V_P は g_P の双対ノルム g_P° を用いて:

$$z \in L^2(\Omega) \mapsto V_P(z) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega g_P^\circ(Dz) := \sup\left\{ \int_\Omega z \,\mathrm{div}\,\varphi \, dx \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \;\in\; C_{\mathrm{c}}^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \\ g_P(\varphi) \le 1 \text{ on } \Omega \end{array} \right\}, \\ \qquad\qquad \text{if } z \in BV(\Omega) \text{ and } |z| \le 1 \text{ a.e. in } \Omega, \\ +\infty, \quad \text{otherwise;} \end{cases} \tag{1}$$

と定義される $L^2(\Omega)$ 上の適正下半連続凸関数の劣微分である.

発展方程式 $(\mathrm{E})_P$ ($P \in \mathscr{P}$) のそれぞれは, 凸関数 V_P を含む以下の汎関数:

$$u \in L^2(\Omega) \mapsto \mathscr{F}_P(z) := \kappa V_P(u) + \int_\Omega \left\{ I_{[-1,1]}(u) - \frac{1}{2}u^2 \right\} dx; \tag{2}$$

の勾配流として導出される. 上記の $\mathscr{F}_P$ は自由エネルギーと呼ばれ, 固体・液体相転移における物質の状態分布 $u \in L^2(\Omega)$ が空間領域 Ω 内で持つエネルギーの総量を表す汎関数である. ここで, ノルム g_P, g_P° は, 結晶成長現象などに現れる異方性の再現によく用いられる数式表現であり, このとき多角形 P は Wulff 図形と呼ばれ, その幾何学的構造は結晶の単位構造そのものに対応する (cf. [2, 3, 4, 5, 6, 8]). この観点から, V_P の定義式 (1) 中に現れる $\int_\Omega g_P^\circ(Dz)$ は, 関数 $z \in BV(\Omega)$ の異方的全変動 (anisotropic total variation) などと呼ばれる. 一般に $(\mathrm{E})_P$ のような異方的全変動を

含む汎関数の勾配流は, 広く異方的全変動流 (anisotropic total variation flow) と呼ばれるが, 本講演ではそれぞれの Wulff 図形 P に対する異方的全変動流 $(\mathrm{E})_P$ 一つ一つが, 相転移における固体-液体間の自由境界 (界面) の運動方程式に対応する.

いま, 形式的に Wulff 図形 P を通常の単位閉円盤 B_1 で置き換えると, ノルム g_P, g_P° は通常の Euclid ノルムと一致し, 自由エネルギー $\mathscr{F}_P$ は式 (2) において汎関数 V_P を以下の凸関数で置き換えたものと一致する:

$$z \in L^2(\Omega) \mapsto V_0(z) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |Dz|, & \text{if } z \in BV(\Omega) \text{ and } |z| \le 1 \text{ a.e. in } \Omega, \\ +\infty, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

ここに, $\int_\Omega |Dz|$ は関数 $z \in BV(\Omega)$ の全変動を表す. 従って, この場合の自由エネルギーの勾配流は V_0 の劣微分作用素を ∂V_0 含む発展方程式：

$$(\mathrm{E})_0 \qquad u'(t) + \partial V_0(u(t)) \ni u(t) \ \text{ in } L^2(\Omega);$$

で書き換わることになるが, この方程式は先の $(\mathrm{E})_P$ 対比してしばしば等方的全変動流と呼ばれる.

本講演では, 閉凸多角形の列 $\{P_n \,|\, n = 1, 2, 3, \cdots\} \subset \mathscr{P}$ を 以下の条件を実現するように選ぶ状況を考える:

$$\operatorname{dist}_*(\partial P_n, \mathbb{S}^1) := \sup_{v \in \partial P_n} \operatorname{dist}(v, \mathbb{S}^1) \to 0 \ \text{ as } n \to +\infty. \tag{3}$$

すぐに確かめられるように, 状況 (3) の下で $n \to +\infty$ とするとき, 対応する凸関数の列 $\{V_{P_n} \,|\, n = 1, 2, 3, \cdots\}$ は凸関数 V_0 に Mosco [7] の意味で収束する. 即ち, 状況 (3) の元では等方的全変動流 $(\mathrm{E})_0$ を 異方的全変動流の列 $\{(\mathrm{E})_{P_n}\}$ に対する $n \to +\infty$ とするときの極限問題として捉えることが可能となる.

発展方程式 $(\mathrm{E})_P$ $(P \in \mathscr{P})$ および $(\mathrm{E})_0$ のすべてに共通するのは, 自由エネルギーの凸部分のいずれにも 1 次の増大度が内在する点である (cf. [1, Chapter 5]). こうした 1 次の増大度を伴うエネルギーから導出された勾配流では, 変分構造の特異性 (多価性) が解の構造解析に有効であることがしばしばあり, この特性を利用して勾配流の安定定常解の解構造を明示した研究報告例に, 例えば [9, 10] がある.

この観点から, ここでは状況 (3) での全変動流 $(\mathrm{E})_{P_n}$ の安定定常解のクラスに着目し, $n \to +\infty$ とするときの極限構造に対する幾何学的観点からの考察を与える. その上でこうした極限の考察によるアプローチは, 極限問題 $(\mathrm{E})_0$ に対する安定性解析に対しても有効であることを, 主要な結論として報告する.

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems,* Oxford Science Publications, 2000.

[2] G. Bellettini, V. Caselles, A. Chambolle and M. Novaga, Crystalline mean curvature flow of convex sets, Arch. Rat. Mech. Anal., **179**, no. 1 (2006), 109–152.

[3] V. Caselles, A. Chambolle, S. Moll and M. Novaga, A characterization of convex calibrable sets in $\mathbb{R}^N$ with respect to anisotropic norms, Preprint Univ. Pisa (2005).

[4] Y. Giga, T. Ohtsuka and R. Schätzle, On a uniform approximation of motion by anisotropic curvature by the Allen-Cahn equations, Interfaces Free Bound. **8** (2006), no. 3, 317–348.

[5] Y. Giga and P. Rybka, Facet bending in the driven crystalline curvature flow in the plane, J. Geom. Anal. **18** (2008), no. 1, 109–147.

[6] T. Ishiwata, Motion of non-convex polygons by crystaline curvature and almost convexity phenomena, to appear in JJIAM.

[7] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Advances in Math. **3** 510–585. (1969).

[8] M. Novaga and E. Paolini, Stability of crystalline evolutions, Math. Mod. Meth. Appl. Sci., **15** no. 6 (2005), 1–17.

[9] K. Shirakawa, Stability analysis for two dimensional Allen-Cahn equations associated with crystalline type energies, *Dynamical systems, differential equations and applications (Texas, U.S.A, 2008).* Discrete Contin. Dyn. Syst., suppl. (to appear).

[10] K. Shirakawa and M. Kimura, Stability analysis for Allen-Cahn type equation associated with the total variation energy, Nonlinear Anal., **60**, no. 2 (2005), pp. 257-282.