液滴の挙動を記述する非局所的自由境界問題について

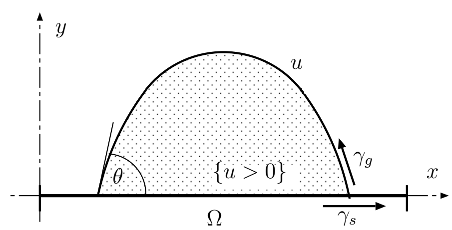
熊本大学応用解析セミナー 第73回、 2009年12月12日

Karel Švadlenka （カレル シュワドレンカ）
金沢大学 理工研究域数物科学系
kareru@staff.kanazawa-u.ac.jp

方程式の導出

平面上に乗っている水滴がゆっくりと運動する現象を考える。水滴をその表面と中にある流体に分けて、水滴が小さいとき表面だけのモデルを考慮する。表面の形状をスカラー関数 u で表せるとすると（図を参照)、表面エネルギーを次の汎関数で近似できる：

$$E = \frac{\gamma_g}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega (\gamma_g + \gamma_s(x))\chi_{u>0} \, dx$$



水滴の体積が一定である、つまり

$$\int_\Omega u\chi_{u>0} \, dx = V = const$$

ということを考慮して、次のモデル方程式が導出される：

$$u_t = \Delta u - \gamma\chi_\varepsilon'(u) + \chi_{u>0}\lambda \tag{1}$$

ここで、特性関数を滑らかにする近似を行い ($\chi_\varepsilon'(u)$ の項)、

$$\lambda = \frac{1}{V}\int_\Omega [uu_t + |\nabla u|^2 + \gamma u\chi_\varepsilon'(u)] \, dx$$

とおいた。

$\varepsilon \to 0$ としたときに、この解が自由境界条件 $|\nabla u|^2 = 2\gamma$ を満たすことが形式的に確かめられる。これは、ヤングの式 $1 - \cos\theta = \gamma$ を近似する関係式である。また、体積保存条件のない問題と違って、滑らかにした問題でも自由境界が現れる。

弱解の存在

方程式 (1) は複雑な非局所的な項と自由境界をもつ問題である。適当な初期と境界条件を与えて、解の存在を証明する。非局所的な項の前に現れる特性関数を滑らかにした近似問題を最小化問題に持ち込むのが証明の基本的なアイデアである。

正則化された方程式は以下の形をしている：

$$u_t^\delta = \Delta u^\delta - \gamma\chi_\varepsilon'(u^\delta) + (\chi_\delta(u^\delta) + u^\delta\chi_\delta'(u^\delta))\lambda^\delta$$

この方程式の解析結果を定理にまとめる。

定理　以上の近似問題には弱解が存在し、$u^\delta \geq 0$ をみたす。また、摂動された体積保存条件

$$\int_\Omega \chi_\delta(u^\delta)u^\delta\,dx = V$$

と次の評価

$$\|u_t^\delta\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\nabla u^\delta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega \gamma\chi_\varepsilon(u^\delta)(t)\,dx \leq C(u_0) \quad \text{a.e. } t$$

をみたす。さらに、この弱解は δ に対し一様有界で、一様 Hölder 連続である。

この定理の証明は問題の変分構造を利用している。時間方向に差分化した汎関数

$$J_n^\delta(u) = \int_\Omega \Big(\frac{|u-u^{\delta,n-1}|^2}{2h} + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \gamma\chi_\varepsilon(u)\Big)\,dx$$

の制約条件つき空間

$$\mathcal{K}_V^\delta = \left\{u \in H_0^1(\Omega);\ \int_\Omega \chi_\delta(u)u\,dx = V\right\}$$

での最小化関数 $u^{\delta,n}$ を求め、その時間補間により近似弱解 $u^{\delta,h}$ を構成し、次に $h \to 0$ とする。体積保存条件を許容関数空間の制約条件として入れたことで、非局所的な項を直接扱わずにすんだ。一様有界性、一様 Hölder 連続性は非局所的な項の評価を取り入れながら、放物型理論を適用した。

最後に一様連続性を用いて、$\delta \to 0$ の極限でもとの問題 (1) の弱解に収束する部分列がとれる。しかし、この弱解の定義では $\{u > 0\}$ の中にサポートをもつテスト関数しか使えないため、少々弱い結果になる。つまり、

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega (u_t\varphi + \nabla u\nabla\varphi + \gamma\chi_\varepsilon'(u)\varphi)\,dx\,dt = \int_0^T \lambda \int_\Omega \varphi\,dx\,dt \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(Q_T \cap \{u>0\}) \\ &u = 0 \qquad\qquad \text{in}\ \ Q_T \setminus \{u > 0\} \end{aligned}$$

という定義である。

最近の研究
この欠点をなくすために、最近の研究では $\Omega = \mathbb{R}^m$ としてより強い評価を出して、自由境界の詳しい性質を探ろうとしている。次の重要な結果が得られた：

定理　問題 (1) の弱解は ε のパラメータに対し、空間で一様 Lipschitz 連続で、時間で一様 Hölder 連続である。

この定理をもとに、domain variation の意味での解が得られると予想される ([7])。

References

[1] H.W. Alt, L.A. Caffarelli: *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*, J. Reine Angew. Math. **325** (1981), pp. 105–144.

[2] F. Brochard: *Motions of droplets on solid surfaces induced by chemical or thermal gradients*, Langmuir **5** (1989), pp. 432–438.

[3] P.G. de Gennes: *Wetting: statics and dynamics*, Rev. Mod. Phys. **57** (1985), pp. 827–863.

[4] K. Ito, M. Kazama, H. Nakagawa, K. Švadlenka: *Numerical solution of a volume-constrained free boundary problem by the discrete Morse flow method*, Nonlinear Phenomena with Energy dissipation, Gakuto International Series: Mathematical Sciences and Applications, **29** (2008), pp. 383–398.

[5] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva: Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translations of the A.M.S. 23, Providence R.I., 1968.

[6] K. Švadlenka, S. Omata: *Construction of solutions to heat-type problems with volume constraint via the discrete Morse flow*, Funkc. Ekvac. **50** (2007), pp. 261–285.

[7] 山浦義彦（日本大学）、Georg Weiss（東京大学）との共同研究。