複素係数を持つ非線形 Schrödinger 方程式の解の爆発

北　直泰（宮崎大学　教育文化学部）

1 Introduction

非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える．

$$
\text{(NLS)}\begin{cases} i\partial_t u = -\frac{1}{2}\partial_x^2 u + \lambda\mathcal{N}(u), \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}
$$

ここで，$(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ であり，$u=u(t,x)$ は複素数値の未知関数である．方程式右辺の非線形項として次のようなものを考える．

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \lambda_1 + i\lambda_2 \quad (\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}), \\
\mathcal{N}(u) &= |u|^{p-1}u \quad (1<p)
\end{aligned}
$$

非線形 Schrödinger 方程式によって近似的に記述される現象にはいろいろある．例えば，水の流れが引き起こす渦糸の形状変化や光ファイバー内を伝播する光信号（＝電磁波）の様子など．特に後者の光信号の場合，変数 t は光ファイバーに沿った位置を表し，変数 x はオシロスコープの時間座標を表している．また，未知関数 $u(t,x)$（正確には絶対値をとって $|u(t,x)|$）は激しく振動する電場の包絡線を表す．方程式 (NLS) に見受けられる係数 λ の実部 λ_1 は, ファイバーの屈折率が電場の強さに非線形的に依存する効果（非線形 Kerr 効果）の度合を表す．さらに, 虚部 λ_2 の物理的な意味については, $\lambda_2<0$ のとき, ファイバー中の不純物によるエネルギー散逸（非線形 Ohm の法則）の度合を表し, $\lambda_2>0$ のとき, 光波の非線形的な増幅効果の度合を表している．実際, ファイバーにエルビウム元素を混ぜることによって微弱な光信号を増幅することが可能で, $\lambda_2>0$ の場合はそれを記述するモデルとなっている [1, 2]．このような光信号の増幅効果は Erbium Doped Fiber Amplification (EDFA) という名称ですでに実用化されている．

非線形 Schrödinger 方程式の数学的な取り扱いでは，係数 λ が実数であることを仮定することが多い．それは，このときに L^2 ノルムやエネルギーのように局所解の延長を考察するときに有用な量が保存するほか，ビリアル恒等式や擬共形恒等式によって表現される特殊な性質が成り立つお陰で，解の減衰や爆発に関する情報が得やすくなるせいであろう．実際，実数係数 λ の下で，解の適切性・非適切性，時間大域解の存在・非存在，$t\to\pm\infty$ における解の漸近挙動，および定在波解の安定性・不安定性に関する話題が実に多くの研究者によって調べられている（[3, 4, 8, 9, 13, 15] やその参考文献を参照）．その一方で，複素係数の λ になると解の挙動に関する結果が乏しい．

(NLS) の大域解について，その減衰評価や漸近形の決定に関する既知の結果を紹介する. 非線形項を摂動として捉える観点で見ると，$t\to\infty$ のときに, 解 $u(t,x)$ は線形 Schrödinger 方程式に漸近的に従うこと（漸近自由になること）が期待される．すると，$u(t,x)$ の一様ノルムにおける減衰オーダーは $t\to\infty$ のときに $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}\sim t^{-1/2}$ である

と予想される．この予想の下で非線形項の減衰オーダーを見積もると, $\|\mathcal{N}(u(t,\cdot))\|_{H^1} \le C\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}^{p-1}\|u(t,\cdot)\|_{H^1} \sim t^{-(p-1)/2}$ となるが, 実はこの非線形評価の右辺が $t=\infty$ 付近で広義積分できるかどうかが, 解の漸近形が漸近自由になるか否かに直結する．したがって, 今の場合 $p=3$ が解の漸近形に何らかの変化が生ずる境目になるものと推測できる．重み付き Sobolev ノルムの意味で小さなデータを扱う範疇で, 既に知られている結果を以下に箇条書きする．

- $3<p$ の場合．任意の複素数 $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$ に対して, (NLS) の解は漸近自由となる [5]. つまり, ある関数 φ が存在して, $t\to\infty$ のときに $u(t,x)\sim\exp(it\partial_x^2/2)\varphi$ となる．したがって, $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le Ct^{-1/2}$.

- $p=3$ かつ $\lambda_2=0$ の場合．Hayashi-Naumkin [7] によって次のことが証明された. ある関数 φ が存在して, $t\to\infty$ のときに

$$u(t,x)\sim MD\exp(-i\lambda_1|\mathcal{F}\varphi|^2\log t)\mathcal{F}\varphi$$

  となる．ここで, M は関数 $\exp(ix^2/2t)$ をかける掛け算作用素であり, D は L^2 ノルムを保存する伸長作用素つまり $Df(x)=(it)^{-1/2}f(x/t)$ である．また, $\mathcal{F}$ は Fourier 変換である．解の漸近形を見ると非線形項に因んだフェーズの修正が現れていることに注意．それゆえに $p=3$ は臨界ベキとよばれる．この結果から, $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le Ct^{-1/2}$ もわかる．減衰オーダーは線形 Schrödinger 方程式の解と同じである．

- $p=3$ かつ $\lambda_2<0$ の場合．Shimomura [14] によって次のことが証明された．ある関数 φ が存在して, $t\to\infty$ のときに

$$u(t,x)\sim MD\exp(-i\lambda|\mathcal{F}\varphi|^2\log t)\mathcal{F}\varphi$$

  となる．この結果から, $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le C(t\log t)^{-1/2}$ もわかる．臨界ベキの非線形項で係数が負の虚部をもつ場合には, 解の漸近形のみならず減衰オーダーにも非線形効果が現れることに注意.

- $p<3$ かつ $\lambda_2=0$ の場合．Hayashi-Kaikina-Naumkin [6] によって次のことが証明された. 解の漸近形にはフェーズの修正が現れるが, L^∞ ノルムの減衰オーダーは線形 Schödinger 方程式の解と同じ.

- $p<3$ (ただし, p は 3 に近い) かつ $\lambda_2<0$ の場合．Kita-Shimomura [10] によって次のことが証明された．ある関数 φ が存在して, $t\to\infty$ のときに

$$u(t,x)\sim MD\exp(-i\lambda\Theta(t,x))\mathcal{F}\varphi$$

  となる．ただし, $\Theta(t,x)=\frac{1}{(p-1)\lambda_2}\log(1+\frac{2(p-1)\lambda_2}{3-p}|\mathcal{F}\varphi|^{p-1}t^{(3-p)/2})$ である．この結果から, $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le Ct^{-1/(p-1)}$ がわかる．劣臨界ベキの非線形項で係数が負の虚部をもつ場合には, 減衰オーダーに非線形効果が色濃く現れる.

これら既知の結果を眺めて空白になっているところを探すと, まず思い当たるのは,

- $p \leq 3$ かつ $\lambda_2 > 0$ の場合

であろう．そこで, 本講演では臨界ベキおよび劣臨界ベキの非線形項で係数 λ の虚部 λ_2 が正の場合に，初期データ u_0 がどんなに小さくても，有限の t で爆発する解が存在することを示す (small data blow-up)．超臨界ベキ $(3 < p)$ の場合には小さい大域解が存在し漸近自由になっていたことを思い出すと, $p \leq 3$ かつ $\lambda_2 > 0$ のときにようやく非線形効果が顕著化し有限時刻の爆発を誘発すると言える. 具体的な主張は以下のとおり.

Theorem 1.1 (爆発解の存在) $(5+\sqrt{33})/4 < p \leq 3$ とし, $\lambda_2 > 0$ かつ $(p-1)|\lambda_1| \leq 2\sqrt{p}\lambda_2$ とする. このとき, 任意の $\rho_0 > 0$ に対して, 初期データ $u_0 \in H^1$ が存在して次が成り立つ.

(i) $\|u_0\|_{H^1} < \rho_0$,

(ii) ある $T^* > 0$ が存在して, (NLS) の解 $u(t,x)$ が $\lim_{t \to T^*} \|u(t,\cdot)\|_{H^1} = \infty$ および $\lim_{t \to T^*} \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} = \infty$ を満たす.

Remark. ベキ p の下限 $(5+\sqrt{33})/4$ の値はだいたい $2.68\cdots$ である．係数 λ_1 と λ_2 の条件「$(p-1)|\lambda_1| \leq 2\sqrt{p}\lambda_2$」は一見すると不自然に思われるが, これは大きなデータに対する解の重み付きノルムの大域的評価を得るために利用されるものである．この種の条件は, Liskevich-Perelmuter [11] や Okazawa-Yokota [12] らに見受けられるように, 複素 Ginzburg-Landau 方程式の大域解の存在を示す際にも用いられている．

x が有界区間 I に属する問題設定（境界条件として, Dirichlet 境界条件を与えてもよいし, Neumann 境界条件や周期境界条件を与えても構わない）では，ラプラシアン $-\frac{1}{2}\partial_x^2$ による分散効果があまり効かず，非線形効果のみが解の挙動を支配するので, $\lambda_2 > 0$ のときに有限時刻における解の爆発を示すことは容易である．実際, J. Zhang [16] によって示されたことではあるが, (NLS) の両辺に $\overline{u}$ をかけて積分し虚部をとると,

$$\frac{d\|u(t)\|_{L^2(I)}^2}{dt} = \lambda_2 \ \|u(t)\|_{L^{p+1}(I)}^{p+1} \geq C_I \ \|u(t)\|_{L^2(I)}^{p+1}$$

という微分不等式が得られる．この微分不等式を解けば, 0 ではない任意の初期データに対して有限時刻における解の爆発を示すことができる. なお, 上の微分不等式を導く際に Hölder の不等式が用いられているが, このような議論は有界領域の場合にしか適用できない．一方，本講演で取り扱う問題では, x が非有界領域に属するので, ラプラシアンによる分散効果を大いに意識する必要がある．この点で J. Zhang の取り扱いがうまくいかず, 解の爆発を示す際に工夫が必要になる．また，Schrödinger 方程式の場合には熱方程式特有の比較定理が成り立たないので，爆発解を構成するためには何らかの新しいアイデアが必要になる．そこで，証明のアイデアとして Schrödinger 方程式の特質：

- 過去に向かって解けること．
- $\lambda_2 > 0$ は，$t < 0$ に対して消散効果をもたらすこと．

に注目する．すると，証明の本質は「$t < 0$ における解の減衰評価」に帰着されることがわかる．以下でもう少し詳しく主結果の証明のアイデアを紹介しよう．

2 証明のアイデア

3 つのステップに分けて爆発解の構成法を示す.

(Step 1) 爆発解の主な profile を捉える. この profile は常微分方程式：

$$
(\mathrm{ODE})\begin{cases} i\partial_t\varphi = \lambda\mathcal{N}(\varphi), \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x) \end{cases}
$$

の解である．これは, (NLS) のラプラシアンを落としたものである．この (ODE) は容易に解くことができて,

$$
\varphi(t,x) = \varphi_0(x)\exp\left\{\frac{i\lambda}{(p-1)\lambda_2}\log(1-(p-1)\lambda_2|\varphi_0(x)|^{p-1}t)\right\}
$$

が得られる．初期データの $\varphi_0(x)\in C_0^\infty$ については, 実数値関数で $\mathrm{supp}\varphi_0\subset[-1,1]$ とし, $\varphi_0(x)=\max\varphi_0 \iff x=0$ を満たすものとする．こうしておくと, ある時刻で $x=0$ においてのみ $\varphi(t,x)$ が発散するようになる．$\max\varphi_0$ の値を適宜調節することで, (ODE) の解 $\varphi(t,x)$ が $t=1$ で発散するようにできるので, 以後 $t=1$ で解が発散するものとして話を進める. さらに φ_0 には, flatness の条件（平坦条件）を仮定する．つまり, 十分大きな自然数 N に対して,

$$
-1/2<x<1/2 \Longrightarrow \varphi_0(x)=\max\varphi_0 - x^{2N}
$$

が成り立つものとする．この条件のお陰で, $\varphi(t,x)$ の高次導関数の発散の度合を抑えることが可能になる．つまり, $0\le k\le 2N$ に対して,

$$
\|\partial_x^k\varphi(t,\cdot)\|_{L^q}\le C(1-t)^{-1/(p-1)-k/2N}
$$

が成り立つ. N が大きいとき（flatness が高いとき）, $\partial_x^k\varphi(t,x)$ の爆発オーダーがさほどひどくならないことに注意しておこう.

(Step 2) profile の爆発時刻から過去に向かって (NLS) の局所解を構成する. (NLS) の解 $u(t,x)$ が, (Step 1) で構成した profile に摂動がついたものだと考える．つまり,

$$
u(t,x)=\varphi(t,x)+\tilde{u}(t,x)
$$

とおく．この表現を (NLS) に代入して $\tilde{u}$ が満たすべき方程式を導くと,

$$
(\ \widetilde{\mathrm{NLS}}\ )\qquad i\partial_t\tilde{u} = -\frac{1}{2}\partial_x^2\tilde{u}-\frac{1}{2}\partial^2\varphi+\lambda(\mathcal{N}(\varphi+\tilde{u})-\mathcal{N}(\varphi))
$$

となる．この方程式に $t=1$ での初期条件 $\tilde{u}(1,x)=0$ を付与して過去に向かって解く．この方程式の非線形項には $t=1$ において強い特異性のある係数が含まれている．それゆえ, 通常の積分方程式に変換して縮小写像の原理を適用する方法がうまく機能しない. そこで, エネルギー法によって局所解を構成することになる. 結論を記述すると, 以下のとおり. エネルギー法で特異性の強い項を落とす際に係数の条件 $\lambda_2>0$ かつ $(p-1)|\lambda_1|\le 2\sqrt{p}\lambda_2$ が用いられる.

Proposition 2.1 $(5+\sqrt{33})/4 < p \leq 3$ とし, $\lambda_2 > 0$ かつ $(p-1)|\lambda_1| \leq 2\sqrt{p}\lambda_2$ とする. このとき, ある時刻 $T < 1$ に対して, $(NLS^{\sim})$ の解が存在して次が成り立つ.

(i) $\tilde{u}(t) \in C([T,1];H^1)$ かつ $x^2\tilde{u}(t) \in C([T,1];L^2)$,

(ii) $\|\tilde{u}(t)\|_{L^2} \leq C(1-t)^{d_0}$ かつ $\|\partial_x \tilde{u}(t)\|_{L^2} \leq C(1-t)^{d_1}$ が成り立つ. ここで, $d_0 = 1-1/(p-1)-1/N$, $d_1 = 1-1/(p-1)-3/2N$ である.

(Step 3) 局所解を過去に向かってつないで大域解を得る. この事実を示すために, 大きなデータに対する大域解の存在定理を利用する. 命題の形でその内容を以下に示す. 大きなデータに対して重み付きノルム $\|(x+it\partial_x)u(t)\|_{L^2}$ の大域的評価を導くために, p や λ_1, λ_2 の制約が必要になってくる.

Proposition 2.2 $(5+\sqrt{33})/4 < p \leq 3$ とし, $\lambda_2 > 0$ かつ $(p-1)|\lambda_1| \leq 2\sqrt{p}\lambda_2$ とする. 初期データについては, $u_0 \in H^1$ かつ $x^2 u_0 \in L^2$ とする. このとき, (NLS) の大域的な解が存在して, 次の性質が成り立つ.

(i) $u(t) \in C((-\infty,0];H^1)$, $x^2u(t) \in C((-\infty,0];L^2)$,

(ii) ある関数 $\hat{u}_- \in H^1$ が存在して, $t \to -\infty$ のとき, H^1 の意味で

$$u(t,x) = MDe^{-i\lambda\Theta(t,x)}\hat{u}_-(x) + o(1)$$

が成り立つ. ただし, $\Theta(t,x) = \frac{1}{(p-1)\lambda_2}\log(1+(p-1)\lambda_2|\hat{u}_-(x)|^{p-1}\int_t^{-1}|\tau|^{-(p-1)/2}d\tau)$.

(iii) $\lim_{t\to-\infty}\|u(t)\|_{H^1} = 0$.

この結果から大域解の H^1 ノルムが減衰していることがわかるので, 十分過去の時刻 $t_0 < 0$ をとれば, $\|u(t_0,\cdot)\|_{H^1} < \rho_0$ を満たすようにできる. ここで, この $u(t_0,x)$ を新たに初期データと見做して, 未来に向かって解を眺めれば, (NLS) の爆発解が得られたことになる. これで Theorem 1.1 が示されたことになる.

Theorem 1.1 の仮定には不自然なものがいくつか見受けられる. 今後の課題として以下のものが挙げられよう.

- 非線形項のベキ p の下限を $(5+\sqrt{33})/4$ 以下に下げることはできないか.
- 非線形項の係数 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ の不自然な仮定 $(p-1)|\lambda_1| \leq 2\sqrt{p}\lambda_2$ をはずすことは可能かどうか.
- Theorem 1.1 の主張は,「有限時刻に爆発する初期データがある」というものだが, 0 ではない任意の初期データに対して解が爆発するかどうか定かではない.
- 問題の高次元化 (空間 n 次元) で, 爆発解の構成は可能か. 自己相似解の存在を示すことで部分的な結果が得られそうな気がするが, 未だ考察には至っていない.

参考文献

[1] G. P. アグラワール（小田垣孝, 山田興一 共訳）, 非線形ファイバー光学, 吉岡書店 (1997).

[2] G. P. Agrawal, Nonlinear fiber optics, Academic Press, Inc. (1995).

[3] T. Cazenave and A. Haraux, An Introduction to Semilinear Evolution Equations, Oxford Science Publications (2006).

[4] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger Equations, Courant Lecture Notes in Mathematics **10**, American Mathematical Society (2003).

[5] J. Ginibre, An introduction to nonlinear Schrödinger equations, in "Nonlinear Waves," (R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa, Eds.), GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications **10** (1997), 85–133.

[6] N. Hayashi, E. Kaikina and P. Naumkin, *Large time behavior of solutions to the generalized derivative nonlinear Schrödinger equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **5** (1999), 93–106.

[7] N. Hayashi and P.I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–645.

[8] N. Hayashi, P.I. Naumkin and H. Sunagawa, *On the Schrödinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type*, SIAM J. Math. Anal. **40** (2008), 278–291.

[9] T. Kato, Nonlinear Schrödinger equations, in "Schrödinger Operators," (H. Holden and A. Jensen Eds.), Lecture Notes in Phys. **345**, Springer-Verlag (1989), 218–263.

[10] N. Kita and A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions to Schrödinger equations with a subcritical dissipative nonlinearity*, J. Differential Equations **242** (2007), 192–210.

[11] V.A. Liskevich and M.A. Perelmuter, *Analyticity of submarkovian semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1097–1104.

[12] N. Okazawa and T. Yokota, *Global existence and smoothing effect for the complex Ginzburg-Landau equation with p-Laplacian*, J. Differential Equations **182** (2002), 541–576.

[13] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[14] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 1407–1423.

[15] 堤誉志雄, 偏微分方程式論, 培風館 (2004).

[16] J. Zhang, *On the finite-time behaviour for nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **162** (1994), 249-260.