ある退化放物型方程式の解に対する HÖLDER 評価

水野 将司 (東北大学 大学院理学研究科 D3)

次の発散型外力項を持つ退化放物型方程式を考える:

$$
\text{(dP)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f(t,x), \quad t > 0\,,\, x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad u(0,x) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}
$$

ここで, $\alpha > 1$ は定数であり, $f = f(t,x)$ は与えられた $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{R}^n$ 値関数である.

外力 f は xu や $u\nabla(-\Delta+1)^{-1}u$ を想定している. xu は非有界な係数を持つことに注意する. $u\nabla(-\Delta+\lambda)^{-1}u$ は Keller-Segel 方程式系にあらわれる非局所的非線形項であり, 比較原理が一般には成立しない. このような外力を持つ (dP) の解の時空間一様な Hölder 連続性について考察する. なお, $f \equiv 0$ に対する方程式 (dP) を多孔質媒質方程式という. 多孔質媒質方程式に対して, 滑らかでない特殊解 (Barenblatt 解) が存在するため, (dP) の解は一般に滑らかとならないことに注意しておく.

Caffarelli-Friedman [1] は $f \equiv 0$ に対する (dP) の解の Hölder 連続性を示した. 彼らの証明は, ある微分不等式 (Aronson-Benilan 評価) を本質的に用いているが, $f \not\equiv 0$ に対する Aronson-Benilan 型評価は一般には知られていない. また, Aronson-Benilan 評価の導出には比較原理が鍵となっているが, 我々は f として, 非局所項を想定しているため, 比較原理が一般には成立しない. それゆえ, Caffarelli-Friedman の手法を (dP) に適用するのは難しいと思われる.

他方, DiBenedetto-Friedman [2] (独立に Wiegner [4], 一般化は Misawa [3]) は, $p > 2$ に対して, p-Laplace 発展方程式

$$
(p\text{-L}) \qquad \begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = 0, \quad t > 0\,,\, x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad\qquad v(0,x) = v_0(x) \end{cases}
$$

の弱解 v の勾配が Hölder 連続になることを示した. 彼らの証明には, 比較原理を用いていないことに注意しておく. ところで, $n = 1$ のとき, $u = |\nabla v|$ とおくと, u は多孔質媒質方程式の解となることがわかる. このことから, 彼らの手法は (dP) に対して適用できると推測できる. 実際, DiBenedetto-Friedman は多孔質媒質方程式の解の解の Hölder 連続性を示した. 彼らは (dP) の解の Hölder 連続性も考察しており, $\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1$ なる指数 $p, q \geq 1$ に対して, $f \in L^q(0,\infty\,;\, L^p(\mathbb{R}^n))$ であれば, 解が Hölder 連続になると主張しているが, 証明は与えられていないようである. 我々は, 彼らの証明を拡張し, より広い関数空間に属する外力についても, (dP) の解の Hölder 連続性を示すとともに, (dP) に対する Hölder 評価を得た.

定理を述べるために, 弱 L^p 空間を導入する:

定義 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $p > 1$ に対し, $f \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ であるとは, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ かつ

$$
\|f\|_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} := \sup_{K \subset \Omega\,;\,\mathrm{compact}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{1}{p}}} \int_K |f|\,dx < \infty
$$

であるときをいう.

注意 2. Hölder の不等式と $|x|^{-\frac{n}{p}} \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ より, $L^p(\Omega) \subsetneq L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ が従う.

定理 3. u を有界で非負な (dP) の弱解とする. (簡単のため)$n \geq 2$ とする. $\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1$ をみたす $p, q \geq 1$ に対し, $f \in L^q(0, \infty; L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n))$ を仮定する. このとき, n, α, p, q にのみ依存する定数 $C, \sigma > 0$ が存在して,

$$|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(s,y)| \leq C(\|u\|^\alpha_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\frac{1}{q}(\alpha-1)}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n))}) \times (\|u\|^{\frac{\sigma}{2}(\alpha-1)}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}|t-s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-y|^\sigma)$$

が (t,x), $(s,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ.

注意 4. 熱方程式である, $\alpha = 1$ のとき, 定理 3 はよく知られた熱方程式に対する Hölder 評価となっている. そのため, 定理 3 は多孔質媒質方程式に対する Hölder 評価と考えることができる.

注意 5. $\sigma_0 = 1 - \frac{2}{q} - \frac{n}{p}$ とおくと, $\sigma \leq \sigma_0$ が成り立つ. 特に, u と f が時間に依存しない場合には, $q = \infty$ ととることができるが, このときの Hölder 指数 σ_0 は最良定数となる.

証明は, DiBenedetto-Friedman [2] による intrinsic scaling argument と alternative method による. 彼らは, 解の局所的な振動を intrinsic scaling として用いているが, この方法では, Hölder 評価は導出できないように思われる. 我々は, 解の局所的な最大値を intrinsic scaling としてとることにより, Hölder 評価を導出することができた.

intrinsic scaling をとりかえたことにより, alternative method を再構成する必要がある. そのためには, 次の Caccioppoli 評価が重要な役割を果たす.

補題 6 (Caccioppoli 評価)**.** $\rho, M > 0$ に対して, $\eta = \eta(t,x)$ を $Q = (-\frac{\rho^2}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0) \times B_\rho$ 上の cut-off 関数とする. $\frac{3}{4}\omega \leq \operatorname{osc}_Q u^\alpha \leq \omega$ をみたす $\omega > 0$ と $\inf_Q u^\alpha < k < \inf_Q u^\alpha + \frac{1}{2}\omega$ をみたす $k > 0$ に対して, $C = C(\alpha) > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}(0.1)\quad &\sup_{-\frac{\rho^2}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}<t<0} \int_{B_\rho} (u^\alpha - k)_-^2 \eta^2\, dx\Big|_t + (\sup_Q u)^{\alpha-1} \iint_Q |\nabla(u^\alpha - k)_-|^2 \eta^2\, dtdx \\ &\leq C\Big\{\omega \iint_Q (u^\alpha - k)_- \eta \partial_t \eta\, dtdx + (\sup_Q u)^{\alpha-1} \iint_Q (u^\alpha - k)_-^2 |\nabla \eta|^2\, dtdx \\ &\quad + (\sup_Q u)^{\alpha-1} \|f\|^2_{L^q(L^p_{\mathrm{w}})(Q)} \Big(\int_{-\frac{\rho^2}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}}^0 |B_\rho \cap \{u^\alpha(t) < k\}|^{q'(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\, dt\Big)^{\frac{2}{q'}}\Big\}.\end{aligned}$$

をみたす. ここに, $\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$ である.

Caccioppoli 評価を用いることで, 修正した intrinsic scaling に対しても, alternative method を機能させることができる.

References

[1] Caffarelli, L. A. and Friedman, A., Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 361–391.

[2] DiBenedetto, E. and Friedman, A., J. Reine Angew. Math. **357** (1985), 1–22.

[3] Misawa, M., Ann. Mat. Pura Appl. (4) **181** (2002), 389–405.

[4] Wiegner, M., Ann. Mat. Pura Appl. (4) **145** (1986), 385–405.